多柔体系统动力学

黄文虎　邵成勋　等　著

科学出版社

责任编辑：李成香
封面设计：张　放

ISBN 7-03-005080-0
O·840
定　　价：22.30 元
科技新书目：387-071

ISBN 7-03-005080-0

多柔体系统动力学

黄文虎　邵成勋 等著

科学出版社
1996

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统叙述多柔体系统动力学的基础理论和方法及其在航天器和机器人（机械臂）上的一些应用. 还系统介绍了作者近几年研究的振动抑制的逆动力学方法.

本书读者对象为高等院校航天力学、机器人专业的师生及相关专业的科学技术人员.

图书在版编目（CIP）数据

多柔体系统动力学/黄文虎，邵成勋等著.

-北京：科学出版社，1996

ISBN 7-03-005080-0

Ⅰ. 多… Ⅱ. ①黄… ②邵… Ⅲ. 系统动力学，多柔体-航天学-基础理论 Ⅳ. ①N94②V 412

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 18150 号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

科地亚印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1996 年 10 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

1996 年 10 月第一次印刷 印张：14 3/4

印数：1—800 字数：338 000

定价：22.30 元

前　言

多柔体系统动力学是近20多年迅速发展起来的一个力学分支. 它的应用背景包括带有可展开、可伸展或可转动的大型柔性附件的航天器、机器人、机械臂、某些工程机械以及一些高速精密机构.

关于多柔体系统目前尚无公认的、确切的定义. 一般可理解为一个各部件间可在有控条件下相对运动的工程系统. 对这种系统，用传统的结构动力学方法不足以准确地研究它，另一方面它又与控制问题密切结合，结构的柔性与控制系统的交叉问题，十分突出.

多柔体系统动力学的发展，除了由于结构柔性与控制系统交叉作用的推动外，工程系统设计现代化的要求对它也有很大推动作用. 其中的因素之一，就是在设计工作中仿真工作的重要性日益显著. 对于仿真，可以说动力学起到穿针引线，提携全局的作用.

因此，我们编著了这一本《多柔体系统动力学》，对多柔体系统动力学这一新兴的重要学科作比较系统的介绍. 其中包括我们近几年所做的一部分工作和成果. 希望它对于力学工作者、控制工作者和设计工作者都有一些参考价值. 当然本书面向的主要还是从事动力学工作的技术人员，本科生和研究生.

本书共分八章，由黄文虎及邵成勋主编. 参加编写人员的分工如下：第一章和第二章由邵成勋、黄文虎编写；第三章由黄建军、王兴贵、邵成勋、聂润兔编写；第四章由邵成勋、黄建军、管红根编写；第五章由王本利编写；第六章由马兴瑞、王兴贵、宋培林、许宏伟编写；第七章由王学孝、荣丽、邵成勋、陈占清编写；第八章由黄文虎、毕士华、费从宇、邵成勋编写. 在编写中为了使各章不致与所依据的文献脱节，个别章节某些符号与全书符号有点不一致. 当然，在文字风格上的差异也是在所难免的.

本书承清华大学王照林教授审阅. 王照林教授给本书提出了很多中肯的意见和有益的建议. 我们已仔细加以考虑，并深表感谢!

本书的部分研究内容得到国家自然科学基金的资助.

本书的出版还得到中央统战部王兆国部长和其他各位领导的关怀，并得到中央统战部的资助，特此致谢.

作者

1994年10月

目　录

前　言

第一章　绪论 …… 1

§1. 什么是多柔体系统，它的工程背景 …… 1

§2. 多柔体系统动力学的发展概况 …… 3

§3. 多柔体系统动力学的几个突出的问题 …… 6

§4. 本书内容的安排 …… 7

第二章　多柔体系统的描述 …… 10

§1. 引言 …… 10

§2. 描述体间关系的方法 …… 12

§3. 多柔体系统的运动学描述 …… 15

§4. 位形坐标的选择——混合坐标法 …… 18

§5. 连体参考系的设定 …… 23

第三章　多柔体系统动力学方程的建立 …… 29

§1. 引言 …… 29

§2. 虚功原理 …… 30

§3. 用虚功方程建立多柔体簇系统的动力学方程 …… 32

§4. 用 Lagrange 第二方程推导多柔体簇系统的动力学方程 …… 48

§5. Kane 方程的基本概念 …… 51

§6. 用 Kane 法建立多柔体簇系统动力学方程 …… 54

§7. 多柔体链系统的动力学方程 …… 57

§8. 基于向量对的多柔体系统的有约束的动力学方程 …… 66

§9. 用待定乘子法建立多柔体系统动力学方程 …… 69

§10. 多柔体系统动力学方程的符号推导 …… 72

第四章　多柔体系统动力学模型的降阶准则 …… 74

§1. 引言 …… 74

§2. 惯性完备性准则 …… 75

§3. 价值函数和模态价值函数 …… 81

§4. 模态价值分析准则 …… 86

§5. 内部平衡降阶准则 …… 88

§6. 模态的选择和分级降阶问题 …… 97

第五章　多柔体系统动力学的几个数值解法 …… 101

§1. 引言 …… 101

§2. 隐式 Runge-Kutta 法（RK 法） …… 102

§2.1　Runge-Kutta 方法的一般形式 …… 102

§2.2　基于数值求积的隐式 RK 方法 …… 104

§3. Gear 方法及改进 …… 105

§4. 辛算法的概念和算式 …… 107

§4.1 辛几何 …… 107
§4.2 Hamilton 力学与辛算法 …… 109
第六章 约束多体系统动力学理论方法及应用 …… 115
§1. 引言 …… 115
§2. 约束多体系统动力学的 d'Alembert -正交补方法 …… 115
§3. 约束多体链的运动学和动力学方程 …… 118
§3.1 几类系统的约束多体动力学模型 …… 118
§3.2 约束多体链的运动学描述 …… 119
§3.3 约束多体链的动力学方程建立 …… 122
§3.4 约束函数及正交补方法的约束多体链动力学方程 …… 124
§4. 基于约束多体链的 d'Alembert -正交补方法的动力学计算机仿真程序及算例 …… 126
§4.1 DRCRCS 程序简介 …… 126
§4.2 算例及结果分析 …… 127
§5. 约束多体系统动力学的 Newton-Euler 正交法 …… 132
§5.1 Newton-Euler 正交法的一般原理 …… 133
§5.2 Newton-Euler 正交法在机器人动力学中的应用 …… 135
§5.3 机械臂 PUMA562 实例 …… 137
§6. 约束多体系统动力学的两种递推子结构方法 …… 142
§6.1 子结构综合的递归消约束法 …… 142
§6.2 子结构综合的一次消约束法 …… 144
§6.3 子结构综合方法的应用 …… 145
§7. 双机器人捕捉公共目标的协调关节轨迹规划 …… 148
§7.1 机器人的无因次归一化关节轨迹 …… 149
§7.2 规划轨迹的机器人约束条件 …… 150
§7.3 系统关节空间的协调运动轨迹 …… 151
§7.4 算例 …… 152
第七章 飞行器对接动力学 …… 154
§1. 引言 …… 154
§2. 对接的动态约束条件 …… 157
§2.1 导向叶片和捕获环上点的几何描述 …… 158
§2.2 动态约束条件 …… 159
§2.3 接触力的方向 …… 161
§3. 滑动和捕获阶段的对接动力学方程 …… 162
§3.1 追踪飞行器的惯性力虚功率 …… 163
§3.2 主动对接机构的惯性力虚功率 …… 165
§3.3 目标飞行器的惯性力虚功率 …… 167
§3.4 弹性力虚功率和外力虚功率 …… 168
§3.5 对接动力学方程 …… 169
§4. 调整与紧固阶段的动力学方程 …… 172
第八章 柔性机械臂振动控制的逆动力学方法 …… 175
§1. 引言 …… 175
§2. 简单柔性机械臂基于谱分析的构造性逆动力学方法 …… 177

§2.1 简单柔性机械臂的模型 …… 177
§2.2 逆动力学方法的基本原理 …… 178
§2.3 构造实例 …… 180
§3. 柔性机械臂两点边值逆动力学方法 …… 182
§3.1 两点边值逆动力学方法 …… 183
§3.2 轨迹追踪问题 …… 184
§3.3 算例 …… 185
§4. 柔性机械臂点位运动控制的轨迹规划 …… 186
§4.1 铰关节的运动学分析 …… 188
§4.2 点位运动控制的逆动力学方法 …… 189
§4.3 铰关节最优和次优运动轨迹 …… 190
§5. 柔性机械臂轨迹追踪控制的递推逆动力学方法 …… 191
§5.1 柔性机械臂的运动学描述 …… 191
§5.2 相邻连杆的运动学关系 …… 192
§5.3 柔性连杆变分形式的动力学方程 …… 193
§5.4 柔性机械臂的逆动力学分析 …… 194
§6. 柔性机械臂逆动力学开环控制的实验研究 …… 195
§6.1 实验装置简介 …… 195
§6.2 伺服系统 …… 196
§6.3 柔性机械臂逆动力学的实验研究 …… 197
附录A 关于刚体转动的一些概念 …… 200
§1. 坐标转换矩阵 …… 200
§2. 向量运算的矩阵表达 …… 201
§3. 角速度向量与坐标转换矩阵间关系 …… 202
§4. 动坐标参考系内向量的时间导数 …… 204
§5. Euler 角 …… 205
§6. Euler 角的时间导数与角速度向量分量间的关系 …… 209
§7. Euler 参数 …… 210
§8. 并矢张量 …… 211
附录B 关于结构动力学的一些基本概念 …… 215
§1. 引言 …… 215
§2. 模态展开 …… 217
§3. 用模态坐标表达的结构动能和弹性变形能 …… 219
§4. 振动方程的状态方程表达式 …… 219
§5. 状态方程的特征值问题 …… 220
参考文献 …… 223

第一章 绪 论

§1. 什么是多柔体系统，它的工程背景

关于多柔体系统，目前尚无确切的、众所接受的定义. 人们通常将多柔体系统理解为由多个柔性体（柔性部件）通过铰链（又称关节）连接而成的一个系统；相邻两个柔性部件之间可以有较大的相对刚体位移发生. 因此，多柔体系统和由多个柔体组成的结构是不同的. 传统意义下的结构，应该具有几何不可变性，就是说相邻两部件间除弹性变形外，不允许有相对的刚体位移发生. 这样，一个固定的结构（如楼房、桥梁）的自由度数，只是它的弹性位移的自由度数. 倘若结构是可移动的（如车辆，飞行器），则还需加上可能发生的整体运动的刚体自由度数. 但是对于多柔体系统就完全不同了，除去各柔性体的弹性位移的自由度数以外，还有两柔性体间的关节的刚体运动自由度数. 例如图1－1所示的由两个柔性臂杆组成的平面机械臂，倘若关节被锁死，它就是一个结构（悬臂梁）. 它的自由度数目就是弹性位移的自由度数. 如果利用有限元法，可确定其弹性位移自由度数为 N_E. 但当关节不被锁死时，在关节处就可能发生相对刚体转角 θ_1 和 θ_2. 这时就构成一个由两柔体组成的多柔体系统，它的自由度数目就是弹性位移自由度数目与关节的刚体位移自由度数之和，在本例中 $N = N_E + 2$. 由此可见，多柔体系统已经不是传统定义下的结构. 对于多柔体系统，它的刚体位移（包括系统整体运动的刚体位移和部件间的相对刚体位移）总是和弹性位移同时发生、相互耦合的；而且这些刚体位移大都是在有控条件下发生的. 例如机械臂是靠关节处的电机驱动以产生关节的相对转角，从而完成指定的操作任务的. 因此可以说，多柔体系统事实上是一类在有控条件下运动的工程系统. 对于这样一类不属于结构的工程系统，用传统的结构动力学理论和方法已不足以对它进行动力学分析，因此，发展了多柔体系统动力学.

目前公认，多柔体系统动力学理论的发展是以三个重要的工程领域作为背景的. 这就是航天器、机器人（机械臂）和高速精密机构，尤以前两者的推动作用最大.

机器人（机械臂）必然被模化为多体系统是显而易见的. 图1－1是一个例子. 图1－2是一个自由飞行机器人的示意图，它是一个可移动的多体系统. 目前的地面应用的机器人，它的臂杆还多是刚性的. 但是用于美国航天飞机上的空间遥控机械臂已经具有相当的柔性. 而机器人（机械臂）的轻型化、高速化要求的需要，特别是用于空间环境的空间机械人的发展需要，使得机器人工程领域成为推动多柔体系统动力学发展的一个重要的工程领域.

航天器工程领域是推动多柔体系统动力学发展的另一个重要领域. 航天器上都需要带有大型天线和太阳帆板. 这些我们都通称为柔性附件. 由于航天器在空间轨道上是在接近于零的过载下（微重力、无机动情况）工作的，因此，这些附件都设计得尽可能的轻柔. 又由于航天器在发射入轨过程中，要承受很大过载，因此，通常在发射时，这些附件是以紧凑形式折叠安装于航天器上，在入轨后，再展开到工作状态. 图1－3就是一

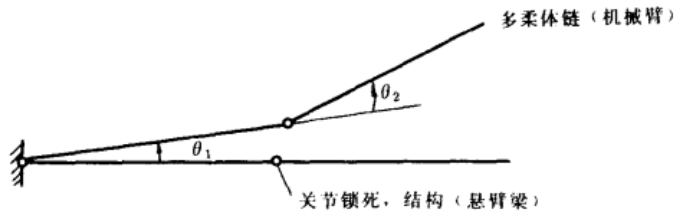


图 1－1　被模化为多柔体系统的机械臂

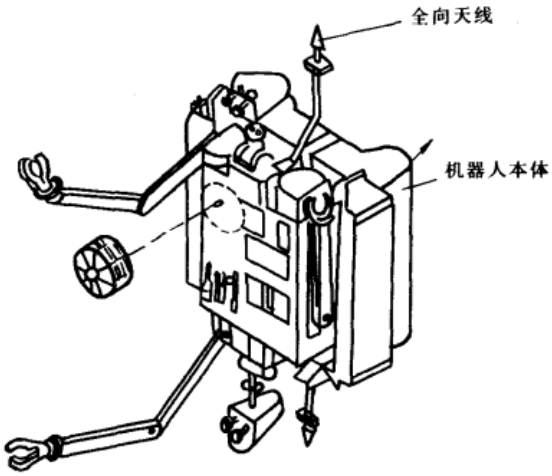


图 1－2　自由飞行机器人示意图

个具有正在展开中太阳帆板的卫星的示意图．这也是一个典型的多柔体系统．在展开过程中，除去帆板有弹性位移，帆板与卫星本体之间以及各子帆板之间都有相对的刚体位移．

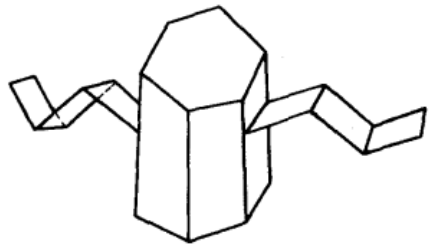


图 1－3　带展开中太阳帆板的卫星示意图

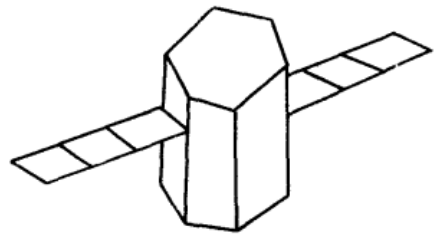


图 1－4　带展开到工作位置太阳帆板的卫星示意图

已经展到工作状态的柔性附件，与航天器之间仍可能有很大的刚体位移. 例如一个地球同步卫星，24 小时对太阳转动 360 度；但太阳帆板必需是永远以最大工作面积朝向太阳，因而它必定相对卫星有刚体转动.

这样，我们就看到了两类最常见的多柔体系统：多柔体簇系统和多柔体链系统. 带有几个已展到工作位置的太阳帆板（当然还包括其他已展开的柔性附件）的航天器，可以看做（或说模化为）多柔体簇系统，因为卫星本体（又可称为根体）如花托，诸柔性附件连于其上形如花簇，图 1－4 被称为多柔体簇系统.

空间机器人或带有展开中太阳帆板等柔性附件的航天器都是多柔体链系统的典型. 因为在这个系统中，诸柔性体串连如链. 当然，可以将簇看做是链的特例.

还有更复杂一点的系统，即多柔体树系统和有回路的多柔体树系统，如图 1－5，图 1－6. 在一些复杂的高速精密机构中可能遇到这样的模型.

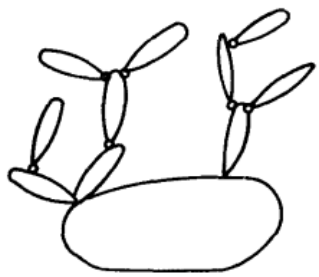


图 1－5　多柔体树系统

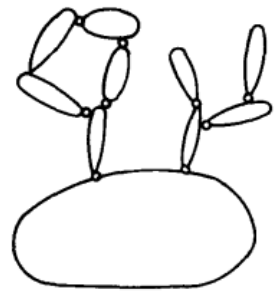


图 1－6　有回路的多柔体树系统

§2. 多柔体系统动力学的发展概况

从动力学角度讲，刚体是柔性体的特殊情况. 因此，在讨论多柔体系统动力学发展时，必然会首先涉及到多刚体系统动力学. 而且正像人们所能想象的那样，首先被发展起来的正是多刚体系统动力学. 最早的工作是 H. J. Fletcher 等人在 1963 年做的. 他们讨论的是由两个刚体组成的系统，使用的是向量力学中的 Newton-Euler 法[20]. 稍晚，在 1965 年 W. W. Hooker 和 G. Margulies 讨论了由 n 个刚体组成的多刚体系统[30,31]. 1968 年 R. E. Roberson 和 J. W. Wittenburg 又把图论中的概念和数学工具（关联矩阵和通路矩阵等）创造性地用于对多刚体系统的描述和动力学方程的建立中[65]. 他们的研究工作把多刚体系统动力学的研究推进到一个新阶段，并有了关于多刚体系统动力学的一本专著[82]. 到目前，多刚体系统动力学发展已较成熟，国内外都有专著[82,90,92].

对多柔体系统动力学的研究开展得略晚一点. 这方面早期工作有 P. W. Likins 在 70 年代初的研究工作[53,54,55]. 他首先研究的是带有弹性附件的卫星的动力学问题，这就是后来被称为的多柔体簇系统. P. W. Likins 采用了由 L. Meirovitch 和 H. D. Nelson 最先提出的混合坐标[60]，这一概念后来被广泛应用于多柔体系统动力学中. 在这一时期，还有 V. J. Modi[63]，C. S. Bodley 等人[10]和 H. P. Frisch[22]都在这一领域做了很多工作.

1978 年C. S. Bodley 等人公布了他们的DISCOS(Dynamic Interaction Simulation of Controls and Structure，控制与结构动力学交互作用模拟）软件[10]. 这是我们能看到的第一个关于多柔体系统的通用软件的源程序. 到此，可以认为多柔体系统动力学的发展已初具规模，它作为力学的一个重要分支的地位已稳固树立了. 事实上，1977 年国际理论力学与应用力学联合会（International Union of Theoretical and Applied Mechanics，IUTAM）曾组织了多体系统动力学的专题学术会议[124]. 1983 年NATO-NSF-ARD 主持了关于机构系统的计算机辅助分析与优化，也是以多柔体系统动力学作为重要主题之一[125]. 1985 年 IUTAM 和 IFTOMM 又再次召开了多柔体系统动力学学术会议[126]. 到 1989 年由 Stuttgart 大学的力学学院主持了关于多体系统动力学分析软件的测试，结果发表了一个手册，系统介绍了一些软件[68].

在多体系统动力学发展的初期，差不多向量力学和分析力学的一些方法都被用来建立动力学方程. 最早被采用的是向量力学中的 Newton-Euler 法[20,65,82]. 它以物理概念鲜明、建立方程直接而著称. 在分析过程中，若需要增加体的数目，（例如在实时分析机械臂攫取物体过程时，体的数目将有增加）只需续增方程数目，无需重新另行建立动力学方程组. 有些文献称之为具有良好的开放性. 这是 Newton-Euler 法的又一个优点. 但消除约束力的困难则是它的一个大的弱点. 以后人们还发现，在采用递推型式时，递推的 Newton-Euler 法运算量最小. 因此，Newton-Euler 法一直受到一些作者的注意. 此外，还有刘延柱提出的旋量-矩阵法[91]，也是属于向量力学范畴的方法. 更多文献在建立多柔体系统动力学方程时，采用的大多是分析力学的各种方法. P. W. Likins 曾用虚功原理[53,54]，这种方法繁而不难，思路清晰. C. S. Bodley 等人用 Lagrange 乘子法. 采用这种方法处理有约束条件的多柔体系统时特别方便，但是它的求导数过程较繁琐，必须十分小心[10]. R. K. Cavin 和 A. R. Dusto 用 Hamilton 原理[14]建立动力学方程. 王学孝等人则用 Jourdian 原理建立了柔性航天器的对接动力学方程[100]. 此外，还有 T. R. Kane 提出的 Kane 方程，它兼有向量力学的形式简洁和分析力学的不必考虑理想约束的约束反力的作用，以及推导规范等优点，被广泛应用于多柔体系统动力学方程的建立[44—47,74]. 还有一些力学工作者深入讨论了 Kane 方程的概念[84,101,102].

以后，随着多柔体系统动力学在航天器、机器人和高速精密机构等工程领域内的深入应用，研究工作又向纵深发展. 由于机器人的爪端有时要在特定的表面上以特定的条件运动；又有些复杂机构需模化成有回路的多柔体系统；又由于多个机器人的协调操作，因此，约束动力学问题引起人们的注意. J. T. Wang 和 R. L. Huston 把待定乘子法推广到 Kane 方程中[81]，建立了带有待定乘子的 Kane 动力学方程，它和 Lagrange 乘子法异曲同工. J. W. Kamman 和 R. L. Huston[43]，许宏伟和马兴瑞[107,108]等先后用正交补矩阵消除待定乘子（Lagrange 乘子），以降低方程维数. 而 Singh 和 Likins 则用奇异值分解技术消除待定乘子[73]. 事实上 Singh 和 Likins 采用的奇异特征向量 V 中的 V_2 就是 Kamman 和许宏伟采用的正交补矩阵，出发点虽不同，但殊途同归. 宋培林和马兴瑞还用切空间和法空间正交理论处理约束系统[78].

随着实时模拟多柔体系统动力学过程的需要，人们又致力于研究提高运算速度的方法. 递推型动力学方程就被提出来了[8,12,29]. D. S. Bae 和 E. J. Haug 用并行处理技术实施了递推动力学的仿真过程[8]. 王兴贵把递推型 Newton-Euler 方程应用于多机器人的

协调动力学与控制中[129].

人们还对求解动力学方程中的一些实用问题给予了很大的注意. 一个重要的、一直吸引了很多作者研究的问题就是动力学模型降阶问题. 柔性体的弹性位移的引入使动力学模型的阶数大为增加. 即使通过弹性位移的模态展开方法引入模态坐标后，动力学模型的阶数仍然过高. 这样高阶的设计模型，其阶数已超出了多变量控制设计技术所能提供的设计能力. 因此模型降阶问题（又称为模态截断问题）曾是很多作者研究的热点.

在众多的关于模型降阶问题的文献中，研究的问题事实上涉及两大类. 一类是研究在求特征值问题时如何以一个低阶模型代替原系统，而使两者所得的特征值至少在我们关心的频段范围内是工程上相符的. 另一类问题是在已求得模态而应用于模态展开时，应选取哪些模态就可使后继分析（控制系统综合或系统仿真）有必要的精度. 前一类问题是结构动力学中感兴趣的问题，又称为特征值提取问题. 后一类问题又称模态截取问题，是多柔体系统动力学中更关心的问题. 在模态截取准则中最使人们感兴趣的有惯性完备性准则[33,34]，模态价值分析准则[75,76]和内部平衡降阶准则[64,69]. 最近还有作者进一步研究采用什么样的模态能更好地进行航天器弹性位移的模态展开[69,26]. 另外，我们还可在大系统理论中找到关于降阶问题的研究，限于篇幅，不加引述.

在求解多柔体系统动力学方程时，另一个使实际工作者们深感烦恼的问题，就是解的稳定性的问题. 出现解的不稳定，可能是物理不稳定，也可能是数值不稳定. 一些作者由方程的非线性特点出发，研究了它的性态，企图弄清楚在哪些情况下可能出现物理不稳定的现象. 马兴瑞等人曾以两臂杆的柔性机械臂为例，说明在这里存在有出现参数共振的可能[94]. 还有文献指出当机械臂的基座作某种往复运动时，可以出现动力不稳定现象. 张嘉钟等的实验研究与分析也说明对非线性系统可能由于“内部共振”而引起不稳定现象[95]. 另一些作者则着重于克服数值不稳定问题的研究. 在这方面辛(Symplectic)算法受到很大重视[96,97,98]，因为这种算法在应用于 Hamilton 系统时有很好的数值稳定性. 辛算法已被应用于多体系统动力学的求解中[99].

在将多柔体系统动力学应用于机器人（或机械臂）时，对振动的主动抑制也是一个重要的问题. 逆动力学方法是近几年提出来的一个振动主动抑制方法. 逆动力学方法是用合理设计机器人（臂）的关节驱动力矩的方法，在机器人（臂）达到操作要求的同时，使弹性振动被抑制到最小. 显然这是一个很吸引人的方法. 在国内黄文虎等在这方面作了系统的工作[85—89,116,117].

另外，近些年来，有些学者在函数空间内，用分布参数理论，对多柔体动力学系统稳定性、镇定与控制进行了研究，从而可以克服由于对无限维柔性系统的“离散化”和“截断”所产生的溢出（spillover）现象以及系统特性的“失真”问题[127,128].

在将多体系统动力学理论推向应用中，计算机程序是非常关键的一环. C. S. Bodley 可能是唯一的一位把计算机程序（即 DISCOS）全部公开发表了的作者. 以后，关于多柔体系统动力学的计算程序屡有报道[111—115]. 1989 年在 Stuttgart 大学的力学学院推动下曾汇集和表演了一批关于多体系统动力学的软件[68]. 这对于推动多体系统动力学软件的发展无疑是很有意义的.

国内关于多柔体系统的研究工作大约起步于 80 年代初. 这些研究工作也是先在航天器及机器人领域内进行的[103—105,100]. 还有一些学者则由一般力学角度进行了讨论. 自 80

年代后期，国内也连续召开了一些学术讨论会，推动这一学科的发展．在应用方面中国空间技术研究院的总体设计部联合国内一些大学作了很深入的工作[130]，结合航天器动力学仿真，编制了若干关于多柔体系统动力学仿真的软件包，由航天器工程提出的需求推动了国内有关研究工作．

§3. 多柔体系统动力学的几个突出的问题

多柔体系统是一个在有控条件下运动的工程系统，在运动时，受控的刚体位移和弹性振动位移同时发生，相互耦合．这样，它的一个重要的特点就是系统的弹性振动与控制间的交互作用．由于缺乏认识而被这种影响所惩罚的例子可上溯到1958年美国第一颗“探险者1号”卫星．这是一个带有四根鞭状天线的卫星．按传统方法，卫星姿态控制系统是按刚性卫星模型进行设计的．但在运行中发现，这样设计的控制系统并未能保持姿态的稳定．正是这四根鞭状天线的振动耗散了能量从而导致卫星的翻滚．到70年代又发现美国的“国际Ⅴ号”通讯卫星的挠性太阳帆板的较高阶频率的扭转振动与驱动系统发生谐振而导致帆板停转和打滑．随着在航天器上采用越来越大的弹性附件，为这一类系统的控制设计和控制品质评定建立多柔体系统动力学模型，就成为迫切的事情．这是系统弹性与控制系统交互作用的第一层意思．

再考虑像机器人（机械臂）的控制设计问题．通常爪端轨迹规划是第一步工作，然后再根据爪端轨迹确定各关节的角位移，并通过控制系统设计加以实现．爪端轨迹规划和关节角位移确定都是只根据运动学考虑作出的．这就是说，传统作法主要用基于运动学的考虑来实现实质为动力学过程的机器人控制设计问题．这样设计的控制系统，由动力学角度看难免有不合理性．当然在实施时还可考虑动力学补偿，但有时这种补偿是十分困难的．因此，系统弹性与控制系统的动力学交互作用的另一个含义应是用运动学与动力学结合的方法进行轨迹规划和控制系统设计．

再次，由于系统的弹性振动存在，总会影响系统的工作质量．例如，1982年美国发射的“陆地卫星-4”的观测仪器的旋转部分受到太阳帆板驱动部分的干扰而产生微小振动，降低了图象质量．图1-7给出了一个单臂杆柔性机械臂未加主动控制时的臂端弹性位移的时间历程；图1-8是加主动控制后的臂端弹性位移的时间历程，可以看出后者的弹性位移仅为未加控制时的1/3左右．显然，没有加主动控制时臂端的振动位移会严重影响机械臂的工作精度．随着机械臂轻型化，臂的弹性振动的自振频率会很低．特别是在空间环境下，这种低频振动一经激起就很难自行衰减掉．因此，对振动的抑制就是一个很重要的课题，其中振动的主动抑制又是一个系统弹性与控制交互作用问题．这也是在多柔体系统动力学中要特别注意研究的问题之一．

多柔体系统动力学的另一个特点是它的方程是强非线性的．一个很实际的问题就是必须考虑它的数值稳定性和物理稳定性．数值稳定性问题是我们在工作中经常受到困扰的问题，需要在数学家们提供给我们的算法中进行选择和改善．物理稳定性问题，在非线性振动中有很多研究．据报道，在振动抑制中曾发现有混沌现象．对某些类型的机械臂，在特定的参数下还可能有动力不稳定现象．这些说明多柔体系统动力学的研究，还必须与非线性理论结合起来．

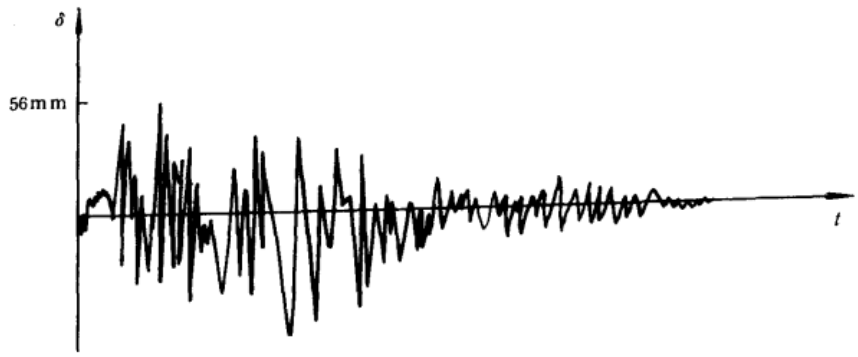


图 1－7　加主动控制前的臂端位移

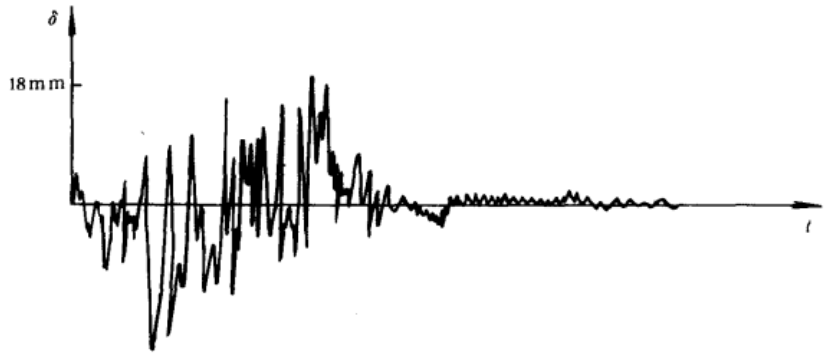


图 1－8　控制后的响应曲线

当然，可以从不同角度去说明多柔体系统动力学的特点．这里是从不同学科及学科分支之间的相互交叉角度说明它的特点．在这本书的编写过程中，力图注意上述问题．但这些都是很复杂的问题，还有待更多的研究和探讨．

§4．本书内容的安排

多柔体系统动力学的基础是分析力学、结构动力学及刚体运动学和动力学．当然还有数学，特别是向量的矩阵运算．我们假定本书读者对分析力学已比较熟悉，但对另一些内容稍欠熟悉．因此，安排了两个附录，简明扼要地介绍关于结构动力学、刚体运动学和向量的矩阵运算．建议读者在阅读时可以先读一读这一部分，因为书的正文中有些公式是由这里引用的．

多柔体系统动力学的著作，我们见到过两本，都是写得很好的[70,93]．本书与之比较起来，将主要篇幅集中到多柔体系统动力学的理论及一些实用问题上．

多柔体系统与结构不同，它是由多个相互间可在有控条件下作刚体运动的弹性体所组成的．因此对它的拓扑关系、动力学及运动学关系都有自己的描述方法．在第二章里对它作一个总的说明．

第三章讨论建立多柔体系统动力学方程的方法．有人曾说，多柔体系统动力学领域是分析力学可以尽情驰骋的广阔领地．就是说分析力学的各种方法都可被用来建立多柔体系统的动力学方程．本章着重介绍其中的虚功原理、Lagrange 方法和 Kane 方程，这里把讨论重点放在 Kane 方程上，因为 Kane 法是近 20 年大家比较注意的方法．为与 Kane 法比较，同时，较详细地介绍了虚功原理．至于 Lagrange 法，因为在分析力学书籍中有详细讨论，这里只直接引用．在这一章还讨论了有待定乘子的虚功原理和有待定乘子的 Kane 方程，并与 Lagrange 乘子法一起用来推导了多柔体树系统和有回路的多柔体系统．

第四章和第五章分别讨论了在实用中的两个重要问题．一个是模型降阶的问题，一个是数值解法问题．

模型降阶问题是动力学与控制结合过程中必须解决的问题之一．事实上，在结构动力学和大系统理论中也研究降阶模型，在那里的出发点是降阶后系统应与原系统的前若干阶特征对是一致的．我们关心的问题稍有不同，是在求得的特征对中，设法选出若干个组成降阶模型．这里着重介绍三个准则：惯性完备性准则、模态价值分析准则和内部平衡降阶准则．

在解动力学响应时，数值发散是一个经常遇到的难题．研究表明，大部分情况是数值不稳定问题；当然在一些特定情况下会有物理不稳定现象．因此，我们专门用一章篇幅讨论数值解法．除了常用的 Runge－Kutta 解法，还介绍 Gear 法，一般认为在解所谓刚性方程时有较好稳定性，以及辛（symplectic）解法，这是一个最近由冯康院士等人倡导研究和应用的有效的算法．

这三、四、五章合起来，可以为解决以多柔体簇系统为特点的航天器动力学问题和以多柔体链系统为特点的机械人动力学问题打下一个基础．

第六、七、八章事实上是几个专门问题．

约束动力学可被用来研究有约束的多柔体系统．例如有回路的多柔体树系统就是一个例子；爪端运动受约束的机器人也是一个例子．当然也可以像 Bodley 一样，用 Lagrange 乘子法研究所有多柔体系统，这也属于约束动力学．约束动力学还可看作是研究多机器人协调操作动力学的基础．具有待定系数的 Kane 方程和 Lagrange 乘子法都能把约束问题处理得非常漂亮，不过把解题的阶数增加为（$n+m$）阶了．这里 n 是原有的位形变量数，m 是约束条件数．第六章介绍两个方法，即正交补矩阵法和切平面法，它们可以把问题恢复到其阶数与独立变量数（$m-n$）一致．在这一章里还讨论了约束动力学在机器人中的若干应用．

对接动力学则是用多柔体系统动力学的基本方法解决航天器对接时的动力学问题，这是载人航天器飞行中的一个重要问题，在第七章里我们讨论了这个专门性问题．

振动抑制的逆动力学方法是第八章的内容．这属于主动抑制的一个方法，事实上属于一种非配置（non-colocated）控制．这是近几年人们很关心的一个问题．

这几章里包括了我们近几年所作的一些工作的成果．

这一本书是我们近几年在这个领域里进行工作、学习的一个小结．我们希望这本书

能把我们在本章第 3 节内谈到的有关多柔体系统动力学几个重要问题的某些侧面反映出来，但限于能力一定会有许多缺点和不足，请广大读者批评指正.

第二章　多柔体系统的描述

§1. 引　　言

在组成多柔体系统的诸体中，有一个体被称为根体，通常记作 B_1. 在根体上可选取一个基点，它的位移可以代表整个多柔体系统的整体位移. 对于大部分工程系统，根体是一个客观存在的体. 例如图 2－1 所示的带有柔性太阳帆板（附件）的卫星系统是一个多柔体系统，这里卫星本身就是该系统的根体. 系统的质心一般是落在卫星本体上，该质心的位移和系统绕该质心的转动显然就代表了整个卫星系统的位移和姿态. 图 2－2 是一个自由飞行的空间机器人，它也有一个明显的根体，整个机器人的质心也在这个根体上，质心的位移和机器人绕该质心的转动就是空间机器人的整体位移和姿态.

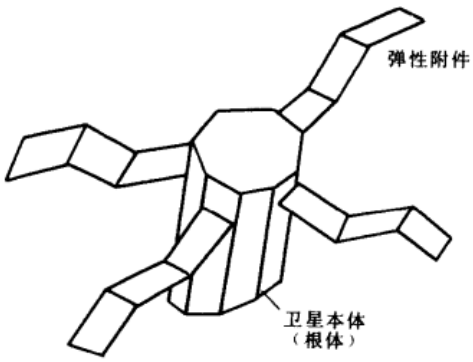


图 2－1　带有附件的卫星示意图

多体系统由多个体和铰组成. 每个铰上都只连有两个体. 对于多体树系统，由任一个铰（记作 h_i）通往根体 B_1 只有一条通路. 连在任一铰 h_i 上的两个体，显然有一个是在铰 h_i 走向根体 B_1 的一侧，这一个体称为内接体；另一个体则在铰 h_i 的离开根体 B_1 的一侧，称为 h_i 铰的外接体. 我们规定 h_i 铰与它的外接体有相同的编号，就是说，h_i 铰的外接体记作 B_i. 对于任一个体，例如 B_j，情况就不同了，其上的铰链数目可能不只两个. 但是对于任一个体 B_j 而言，总只有一个内接铰 h_j，它是位于 B_j 体通往根体 B_1 的途径上. 注意 B_j 体的内接铰与 B_j 有相同的编号，即记作 h_j. 根体 B_1 上的铰，当然全部是外接铰. 但是，我们可以假设在它的特定点上有一个假想内铰 h_1. 通过 h_1 铰，B_1 根体与固连着惯性参考系的“大地”连在一起. 根体 B_1 的特定点是分析者认为可以表征系统的整体位移的点. 这样，在多体系统的每个铰上都有两个体，一个是该铰的内接体，一个是该铰的外接体. 一个铰的外接体与该铰有相同编号. 一个体上可有多个铰，但其中只有一个是内接铰. 一个体的编号与其内接铰编号一致.

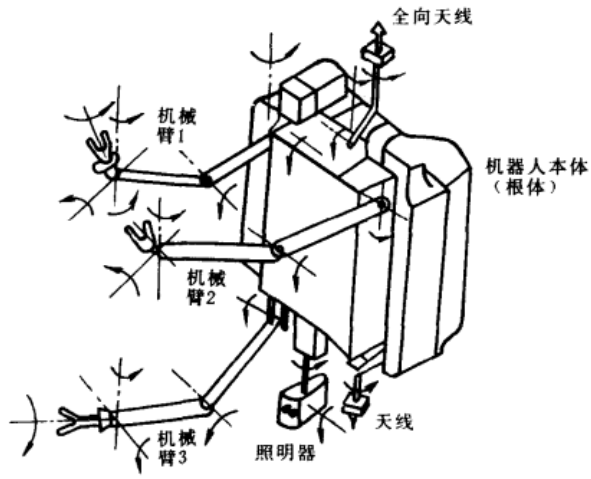


图 2－2　自由飞行空间机器人示意图

还可定义一个体的铰间向量，它定义为在 B_j 体上由内接铰指向外接铰的向量．图 2－3，(b) 给出图 2－3 (a) 中 B_4 体上的两个铰间向量．显然利用铰间向量可以清楚地看出体（或者说铰）的通路．

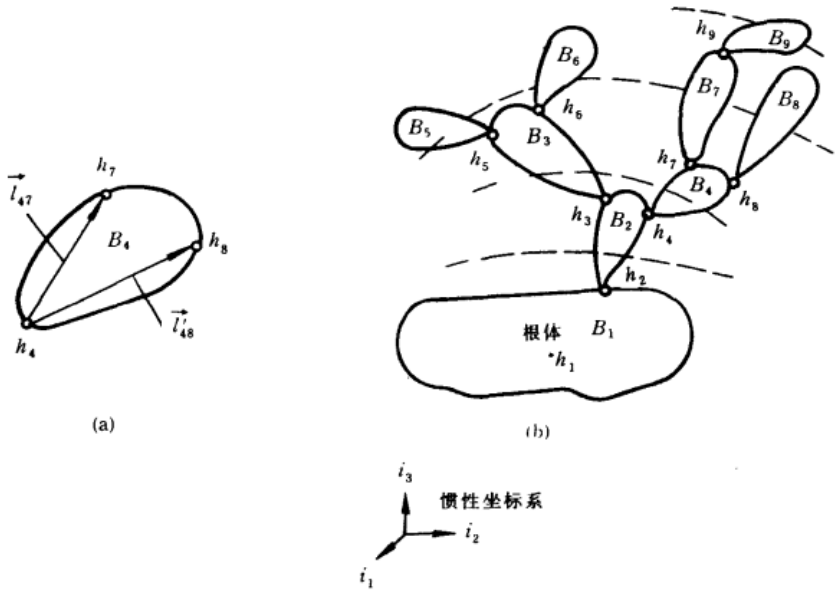
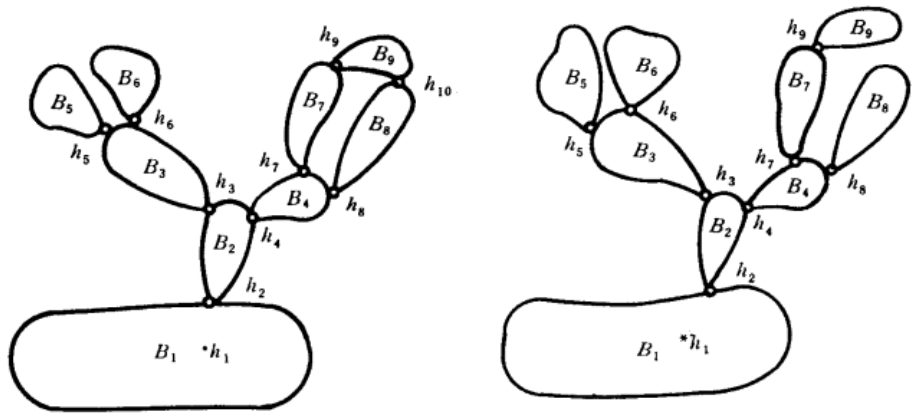


图 2－3　分层的规则编号法

为了描述多柔体系统，我们需给各体和铰以适当编号．编号的原则是便于面向计算机来描述系统的拓扑关系．一个方便的编号方法，是分层编号法，J. Wittenburg 称之为

规则编号法[82]，它是针对多柔体树系统的. 这个方法规定，自根体开始，根体记作 B_1，根体上假想有一个内铰称为 h_1. 然后由根体向外，逐层地给铰链编号. 外层铰链编号大于内层铰链编号. 再令每个铰链的外接体与该铰链有相同的编号. 图 2－3 是关于一个多柔体树系统的规则编号法的一个例子. 倘若一个根体上有几组相互“平行”的多柔体树，就分组地采用规则编号法.

对于带有回路的多柔体系统，在分析时总可以先假想切除掉一些铰链，这样可以得到相应的一个“派生树”. 对派生树可以用规则编号法给予编号，最后再给假想被切除的那些铰链以编号. 图 2－4（a）是一个有回路的多柔体系统，图 2－4（b）是它的一个可能的派生树系统的规则编号系统. 这里 h_{10}是假想被切除的铰. 由图还可见，对有回路系统，铰链数 n_h 总多于体数 n_B.



(a) $n_h = 10$　　(b) $n_h = 9$

图 2－4　有回路的多柔体系统，(a)；及其一个派生树，(b)

§2. 描述体间关系的方法

所谓体间关系是指两件事. 一是要说明连在铰 h_j 上的两个体哪一个是它的内接体，哪一个是它的外接体. 另一个是要说明由某铰（或某体）到根体的途中需要经过哪些体（或哪些铰）. 体间关系是后面讨论的运动学描述和动力学描述所需要的最基本的信息.

对于多柔体链系统，上一节介绍的分层的规则编号法就足以清楚地说明体间关系了. 显然，对于任一铰 h_j，B_j 是它的外接体，B_{j-1}是它的内接体；由 h_j（或 B_j）到根体 B_1 需经过 h_{j-1}，h_{j-2}…直到 h_2 的诸铰，或者说需经 B_{j-1}，B_{j-2}，…直到 B_2 的诸体.

对于多柔体树系统，仅用分层的规则编号法来说明体间关系就不够了. 一个有效的方法是由 R. E. Roberson 和 J. Wittenburg 首先提出的基于图论的关联矩阵（incidence matrix）和通路矩阵（path matrix）[65,82]. 关联矩阵 S 可以说明铰 h_j 的内接体和外接体. 设多柔体树系统有 n 个铰，因而也有 n 个体，参看图 2－3. 这时关联矩阵 S 是（$n \times n$）阶

方阵，它的纵列表示铰的编号，它的横行表示体的编号．关联矩阵 $\underset{\sim}{S}$ 的元素 S_{ij} 定义为

$$S_{ij}=\begin{cases}-1, & \text{倘 } B_i \text{ 体是 } h_j \text{ 铰的内接体}\\ 1, & \text{倘 } B_i \text{ 体是 } h_j \text{ 铰的外接体}\\ 0, & \text{倘 } B_i \text{ 体与 } h_j \text{ 铰无关}\end{cases} \tag{2-2-1}$$

例如图 2－3 多柔体树的关联矩阵 $\underset{\sim}{S}$ 是（9×9）方阵，其形式为

$$\underset{\sim}{S}=\begin{array}{c} \\ B_1\\ B_2\\ B_3\\ B_4\\ B_5\\ B_6\\ B_7\\ B_8\\ B_9\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & h_8 & h_9\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & & \\ & 1 & -1 & -1 & & & & & \\ & & 1 & & -1 & -1 & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & -1 & -1 & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & -1\\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1\end{bmatrix}\end{array} \tag{2-2-2}$$

由（2－2－2）式可见关联矩阵的两个特点：

1．主对角线上的元素全部是 1，它反映了铰链 h_j 与它的外接体 B_j 有相同编号；

2．每列中只有两个元素是非零的，主对角线上元素是 1，另一个非零元素是－1，这反映了每个铰（注意 $\underset{\sim}{S}$ 的纵列表示铰的编号）上只有两个体，一个内接体和一个外接体．

描述体间关系的另一个矩阵是通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$，它说明由体 B_j 到根体 B_1 的通路上有哪些铰．对于多柔体树系统，通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 也是一个（$n\times n$）的矩阵．但是我们令通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 的横行表示铰的编号，纵列表示体的编号．这一点和关联矩阵 $\underset{\sim}{S}$ 恰好相反．通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 的元素 T_{ij} 定义为

$$T_{ij}=\begin{cases}1, \text{若 } h_i \text{ 铰在由 } B_j \text{ 到根体 } B_1 \text{ 途上}\\ 0, \text{若 } h_i \text{ 铰不在 } B_j \text{ 到根体 } B_1 \text{ 途上}\end{cases} \tag{2-2-3}$$

图 2－3 的通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 形式为

$$\underset{\sim}{T}=\begin{array}{c} \\ h_1\\ h_2\\ h_3\\ h_4\\ h_5\\ h_6\\ h_7\\ h_8\\ h_9\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 & B_9\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ & & 1 & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & & 1 & 1 & 1\\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & 1\\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1\end{bmatrix}\end{array} \tag{2-2-4}$$

由（2－2－4）可见，通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 有以下几个特点：

1. 通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 的任一列（例如第 j 列）的非零元素表示由 B_j 到 B_1 根体途中经过哪些铰. 例如（2－2－4）的第 7 列说明由体 B_7 到根体 B_1 共经过 h_2，h_4 和 h_7 三个铰，又根据规则编号法，$B_i=h_i$，因此也可以说由体 B_7 到根体 B_1 共经过 B_2，B_4 两个体.

2. 通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 的任一行，例如第 i 行，表示连接于 h_i 铰上的全部外接体有哪些；这些外接体总和又可称为 h_i 铰的增广外接体. 例如，第 4 行表示连接于 h_4 铰上的增广外接体由 B_4，B_7，B_8 和 B_9 组成，参看图 2－4.

3. 可很容易地证明，对于多柔体树系统：

$$\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{I} \tag{2-2-5}$$

其中 $\underset{\sim}{I}$ 是 n 阶单位方阵.

倘若我们研究的是一个有回路的多柔体系统，例如图 2－4，我们先将某些铰链假想切开，得出相应的派生树. 这时可对派生树按规则编号法编号，并给出相应的通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$. 至于关联矩阵 $\underset{\sim}{S}$，则不仅包括派生树，还包括被假想切除的那些铰链，这样 $\underset{\sim}{S}$ 应是一个（$n_B\times n_h$）的矩阵，其中 n_B 是体的总数，n_h 是铰的总数，显然 $n_h>n_B$. 这样 $\underset{\sim}{S}$ 可表示为两部分，即

$$\underset{\sim}{S}=[\underset{\sim}{S}_T\,|\,\underset{\sim}{S}_C] \tag{2-2-6}$$

其中 $\underset{\sim}{S}_T$ 是派生树的关联矩阵，对于图（2－4）多柔体系统，$\underset{\sim}{S}_T$ 仍如（2－2－2）. $\underset{\sim}{S}_C$ 是连于被假想切除的那些铰上有哪些体. 显然，这里内接体与外接体的说法上有点任意性.

对于图 2－4 的多柔体系统，$\underset{\sim}{S}_C$ 的转置写作

$$\underset{\sim}{S}_c^T=h_{10}\begin{array}{c}\begin{matrix}B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 & B_9\end{matrix}\\ \begin{bmatrix} & & & & & & & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array} \tag{2-2-7}$$

描述多体树系统体间关系的另一个方法是 R. L. Huston 提出的体间关系数组[35]，记作 $\underset{\sim}{L}$. 顾名思义，这只是为编制计算机程序提供信息的一个数组，并不是一个可供数学运算和理论应用的矩阵.

体间关系数组 $\underset{\sim}{L}$ 的第一行给出了系统中所有各体的编号. 例如对图 2－3 的多柔体树系统，$\underset{\sim}{L}$ 的第一行是对应于 B_1，B_2，…，B_9 的 9 个数. $\underset{\sim}{L}$ 数组的下一行总是填入与上一行的体对应的内接体的编号. 因此，图 2－3 多柔体树系统的体间关系数组 $\underset{\sim}{L}$ 为

$$\underset{\sim}{L}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ &1&2&2&3&3&4&4&7\\ &&1&1&2&2&2&2&4\\ &&&&1&1&1&1&2\\ &&&&&&&&1\end{bmatrix} \tag{2-2-8}$$

由（2－2－8）可见，体间关系数组 $\underset{\sim}{L}$ 有这样几个特点：

1. 体间关系数组的任一列，如第 i 列，表示由 B_i 体到根体 B_1 途中共有哪些体；由于采用规则编号法，$B_j=h_j$，因此也可说途中有哪些铰. 这一点与通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 的任一列的含义一致.

2. 在规则编号法下，体间关系数组 $\underset{\sim}{L}$ 的第 1 和 2 两行给出了关于 h_j 铰的外接体 $B_j=h_j$ 和内接体的信息. 就是说，给出了构成了关联矩阵 $\underset{\sim}{S}$ 的任一列的信息.

3. 体间关系矩阵的列数等于 n_B（体的数目），而行数则取决于最长途径中的体的数

目．它的每一列都填到根体编号 B_1 而终结．

事实上，体间关系数组 $\underset{\sim}{L}$ 是对于多柔体树系统的关联矩阵 $\underset{\sim}{S}$ 和通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 的压缩描述．显然 $\underset{\sim}{L}$ 第一行诸值既是体 B_j 的编号，又是在规则编号法约定下的铰 h_j 的编号；第二行则是对应于第一行的铰 h_j 的内接体的编号 B_i．按（2－2－1）关于关联矩阵的定义，由这两行数字可以给出 $S_{ij}=-1$ 的位置．例如，由体间关系数组 $\underset{\sim}{L}$ 的第 6 列的前两行信息可知，关联矩阵 $\underset{\sim}{S}$ 的 $S_{66}=1$ 和 $S_{36}=-1$．就是说利用体间关系数组 $\underset{\sim}{L}$ 的第 1 和第 2 行信息可构造关联矩阵 $\underset{\sim}{S}$．至于体间关系数组 $\underset{\sim}{L}$ 的每一列，在规则编号法的约定下，恰恰给出了通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 的相应列中非零元素（其值为 1）的行号（体的编号）．例如由 $\underset{\sim}{L}$ 数组的第 8 列可知，在对应的 $\underset{\sim}{T}$ 矩阵中：

$$T_{48}=T_{28}=T_{18}=T_{88}=1,\qquad \text{其余 } T_{j8}=0$$

综上所述，在规则编号法约定下，采用关联矩阵 $\underset{\sim}{S}$ 和通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 描述多柔体树系统的体间关系，十分方便．再利用这个矩阵有关信息的压缩表达数组（体间关系数组 $\underset{\sim}{L}$）更可节省机器内存．

§3．多柔体系统的运动学描述

在建立多柔体系统动力学模型时，可使用向量力学方法或分析力学方法，同时还需考虑运动学约束条件．在向量力学方法中，需考虑惯性力（及惯性力矩）与弹性力和外加力（及相应力矩）间的平衡．惯性力与体的微元素的加速度有关．应用分析力学的方法时，则需要考虑能量，而动能则与体的微元素的速度有关．我们还知道，一个体上的微元素的速度和加速度分别是该微元素的位置向量对时间的一次和二次导数．例如图 2－5 中 B_k 体上微元素 dm 的速度 $\vec{v}_k$ 和加速度 $\vec{a}_k$ 为

$$\vec{v}_k=\frac{D\vec{R}_k}{Dt} \tag{2-3-1}$$

$$\vec{a}_k=\frac{D\vec{v}_k}{Dt} \tag{2-3-2}$$

式中 $\frac{D(\cdot)}{Dt}$ 表示量（·）在惯性参考系内的时间导数．由图 2－5 还可见，B_k 的微元素 dm 的位置向量与其内接体的有关向量有关．因此在本节中，我们需讨论任一体 B_k 上微元素 dm 的位置向量 $\vec{R}_k$ 与有关内接体的其他向量的关系，以及任一体的角速度与有关内接体的角速度间的关系．

为了清楚说明多柔体系统的运动学关系，即有关体间诸位置向量间关系以及角速度间的关系，首先要建立两组坐标参考系．

第一组是惯性坐标系，又称惯性参考系，它是固连在分析者指定为不动的参考物上的坐标参考系．这是一组直角坐标系，它的三个单位基向量可以用矩阵形式给出为 $\underset{\sim}{e}^T=(e_1,\ e_2,\ e_3)$，$e_1$，$e_2$ 和 e_3 的顺序按右手定则给出，即有 $e_1\times e_2=e_3$，$e_2\times e_3=e_1$，$e_3\times e_1=e_2$ 和 $e_1\times e_3=-e_2$ 等关系．由于 e_i 用来专记基向量，所以略去表示向量的箭头．

第二组是分别固连于各体上的连体坐标参考系．B_k 体上的连体坐标系的坐标系原点设在 B_k 体的特定点上，例如设在 B_k 体的内接铰 h_k 上．它也是直角坐标系，它的三个单位基向量也用矩阵形式给出为 $\underset{\sim}{b}_k^T=(b_{k1},\ b_{k2},\ b_{k3})$．$b_{k1}$，$b_{k2}$ 和 b_{k3} 的顺序也依右手定则给

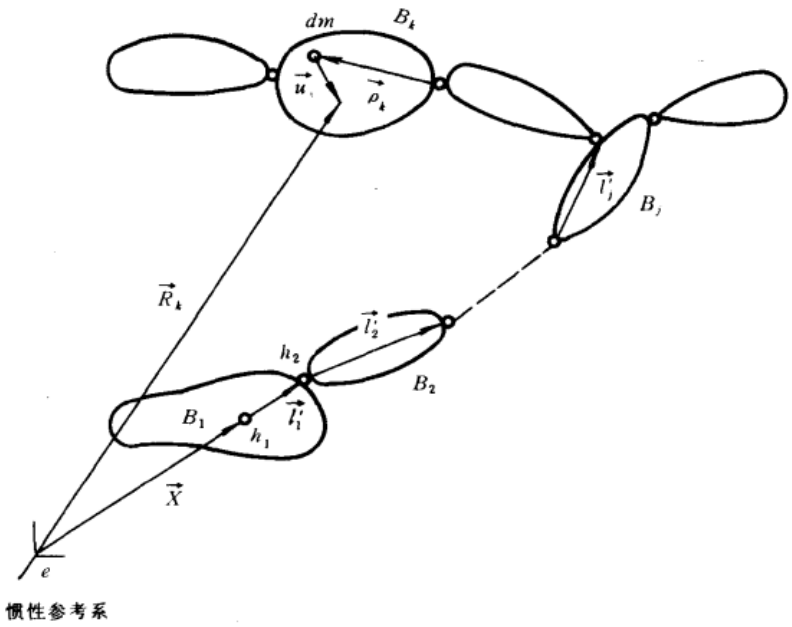


图 2-5　典型体 B_k 的向量 $\vec{R}_k$

出. 这里 b_{kj} 的第一个下标表示该连体坐标参考系固连于哪个体（这里是 B_k 体）；第二个下标表示该基向量的指向（$j=1$，2，3）. 连体坐标参考系 $\underline{b}_k$ 相对于惯性坐标系的转角，就被认为是该体 B_k 相对于惯性坐标系的转角. 这个转动角度由附录 A 中的 Euler 角确定.

描述多柔体系统的运动学关系的方法，与其后继的动力学方程类型有关. 大致有两类方法，可以分别称之为向量链的方法和向量对的方法.

应用向量链方法时，第 k 个体 B_k 上的任一质点 dm 的位置向量 $\vec{R}_k$ 可表达为（参看图 2-5）

$$\vec{R}_k = \vec{X} + \sum_{j=1}^{k-1} \vec{l}'_j + \vec{\rho}_k + \vec{u}_k \qquad k = 2,3,\cdots,n \tag{2-3-3}$$

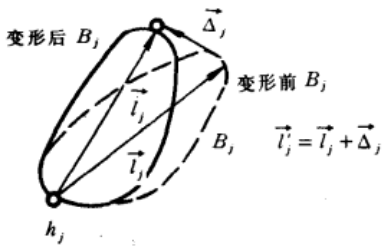


图 2-6　变形前后的链间向量

其中 $\vec{l}'_j$ 是 B_k 体通往 B_1 途径中所经过的典型体 B_j 在变形后的铰间向量；$\vec{\rho}_k$ 是 B_k 体上微元素 dm 在变形前距其连体坐标系 $\underline{b}_k$ 的原点（同时也是 B_k 体的内铰 h_k）的距离；$\vec{u}_k$ 是 dm 的弹性变形. $\sum_{j=1}^{k-1}$ 表示总和遍及 B_k 至 B_1 途中诸体. $\vec{l}'_j$ 又可写作（图 2-6）：

$$\vec{l}'_j = \vec{l}_j + \vec{\Delta}_j \tag{2-3-4}$$

其中 $\vec{l}_j$ 是中间任意体 B_j 变形前的铰间向量，$\vec{\Delta}_j$ 是

B_j 体的有关外铰处的弹性变形，它们当然都是位在 B_k 体到 B_1 体的途径上的. $\vec{X}$ 是根体 B_1 的内铰 h_1 到惯性坐标参考系原点的距离向量.

倘若引入矩阵

$$\underset{\sim}{\vec{R}}^T = [\vec{R}_1, \vec{R}_2, \cdots, \vec{R}_k, \cdots, \vec{R}_n] \tag{2-3-5}$$

其元素 $\vec{R}_k$ 表示由惯性坐标参考系原点到 B_k 上 dm 微元素的位置向量；

$$\underset{\sim}{\vec{l}'}^T = [\vec{l}'_1, \vec{l}'_2, \cdots, \vec{l}'_k, \cdots, \vec{l}'_n] \tag{2-3-6}$$

其元素 $\vec{l}'_k$ 表示变形后（如果 B_k 是弹性体）的铰间距离向量；

$$\underset{\sim}{\vec{\rho}}^T = [\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \cdots, \vec{\rho}_k, \cdots, \vec{\rho}_n] \tag{2-3-7}$$

其元素 $\vec{\rho}_k$ 表示 B_k 体上微元素 dm 到其连体坐标系 b_k 原点（即 h_k 铰）的距离；和

$$\underset{\sim}{\vec{u}}^T = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_k, \cdots, \vec{u}_n] \tag{2-3-8}$$

其元素 $\vec{u}_k$ 表示 B_k 体上微元素 dm 的弹性位移（变形，如果 B_k 是弹性体）；这样（2-3-3）式可改写成矩阵方程的形式：

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{I}_n \underset{\sim}{\vec{X}} + \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{\vec{l}'} + \underset{\sim}{\vec{\rho}} + \underset{\sim}{\vec{u}} \tag{2-3-9}$$

其中，$\underset{\sim}{I}_n^T = [\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{1}, \cdots, \underset{\sim}{1}]$ 列阵，而 $\underset{\sim}{T}$ 是通路矩阵. 在这里请注意对于多柔体树系统，可能在某个体上有多个铰间向量（图 2-3，b），因此（2-3-9）式只是一种格式上的表达，在通过计算机程序实现上述运算时，要注意这个细节.

第 k 个体 B_k 的角速度 $\vec{\omega}_k$ 可以表达为

$$\vec{\omega}_k = \vec{\omega}_1 + \sum_{j=2}^{k} \vec{\Omega}_j + \sum_{j=1}^{k-1} \vec{\beta}_j \qquad k = 2, \cdots, n \tag{2-3-10}$$

其中 $\vec{\omega}_1$ 是根体 B_1 相对惯性坐标参考系的角加速度；$\vec{\Omega}_j$ 是 B_j 体绕着其内铰 h_j（也是连体坐标系 b_j 的原点）的相对角速度；$\vec{\beta}_j$ 是因 B_k 到 B_1 途中典型体 B_j 在它的外接铰 h_{j+1} 处的弹性角位移引起的角速度，对 $\vec{\beta}_j$ 的求总和不包括 k，是因为 $\vec{\beta}_k$ 是 B_k 体的外铰 h_{k+1} 的弹性角位移引起的加速度，由图 2-5 可见，它显然对 B_k 的角速度 $\vec{\omega}_k$ 没有影响. 倘引入

$$\underset{\sim}{\vec{\omega}}^T = (\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \cdots, \vec{\omega}_k, \cdots, \vec{\omega}_n) \tag{2-3-11}$$

$$\underset{\sim}{\vec{\Omega}}^T = (\vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2, \cdots, \vec{\Omega}_k, \cdots, \vec{\Omega}_n) \tag{2-3-12}$$

和

$$\underset{\sim}{\vec{\beta}}^T = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_k, \cdots, \vec{\beta}_n) \tag{2-3-13}$$

这里注意事实上 $\vec{\omega}_1 = \vec{\Omega}_1$，因为我们定义 h_1 是体 B_1 的内铰. 这样，（2-3-10）可以用矩阵形式写作：

$$\underset{\sim}{\vec{\omega}} = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{\vec{\Omega}} + \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{\vec{\beta}} - \underset{\sim}{\vec{\beta}} \tag{2-3-14}$$

式中 $\underset{\sim}{T}$ 是通路矩阵.（2-3-9）和（2-3-14）是用向量链形式给出的体间运动学关系.

描述体间运动学关系的另一方式是采用向量对形式. 用这种方法，将铰作为研究对象，在一个铰 h_i 上只有一对体，一个是它的外接体 B_i（与 h_i 同编号），另一个是它的内接体 B_j. 连在 B_j 的内接铰是 h_j. 这样，我们有

$$\vec{r}_j + \vec{l}_j + \vec{\Delta}_j - \vec{r}_i = 0 \qquad i = 2, \cdots, n \tag{2-3-15}$$

或

$$\vec{r}_j + \vec{l}'_j - \vec{r}_i = 0 \qquad i = 2,\cdots,n \tag{2-3-16}$$

这里 $\vec{r}_i$ 和 $\vec{r}_j$ 分别是铰 h_i 和 h_j 到惯性参考系原点的距离. 注意关联矩阵 $\underset{\sim}{S}$ (2-2-2) 的结构，可有

$$\underset{\sim}{S}^T\vec{\underset{\sim}{r}} - \vec{\underset{\sim}{l}}' = 0 \tag{2-3-17}$$

同样第一式无意义，而且这也只是一种格式表达. 这样，B_i 体上任一微元体上的微元素 dm 到惯性坐标系原点的向量半径就是

$$\vec{R}_i = \vec{r}_i + \vec{\rho}_i + \vec{u}_i \tag{2-3-18}$$

参看图 2-7.

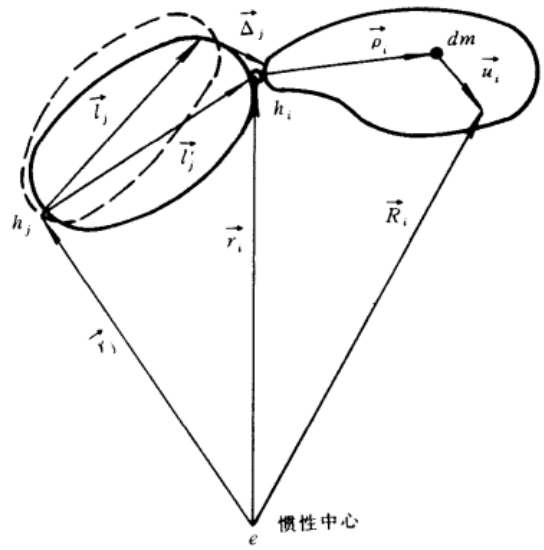


图 2-7 向量对描述

类似地还可得出连在 h_j 铰的两个体间的角速度间关系为

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_j + \vec{\Omega}_i, \quad i = 2,\cdots,n \tag{2-3-19}$$

或以矩阵表达为

$$\underset{\sim}{S}^T\vec{\underset{\sim}{\omega}} - \vec{\underset{\sim}{\Omega}} = 0 \tag{2-3-20}$$

同样，第一式无意义.

以上两个方法给出的运动学描述都可以而且曾被用于推导多柔体系统动力学方程.

§ 4. 位形坐标的选择——混合坐标法

建立动力学方程的第一步工作就是选择位形坐标（位形变量）. 在结构动力学中，位形坐标取为在惯性坐标系内的绝对位移. 例如考虑一个梁式飞行器作平面内运动时的动力学方程. 这时如取运动平面与惯性参考系的 oe_1e_2 平面重合，位形坐标就可取为沿 e_2 轴的绝对位移 y，参看图 2-8. 这样可以求得梁式飞行器的动力学方程，倘采用有限元离

散化方法，其矩阵形式为

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{y}}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{y}=\underset{\sim}{Q} \tag{2-4-1}$$

其中 $\underset{\sim}{y}$ 是位形坐标的向量，$\underset{\sim}{M}$ 是质量阵，$\underset{\sim}{K}$ 是刚度阵，$\underset{\sim}{Q}$ 是与 $\underset{\sim}{y}$ 对应的外力向量.

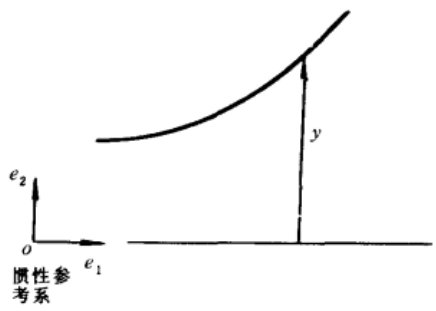


图 2-8　自由梁变形的绝对坐标

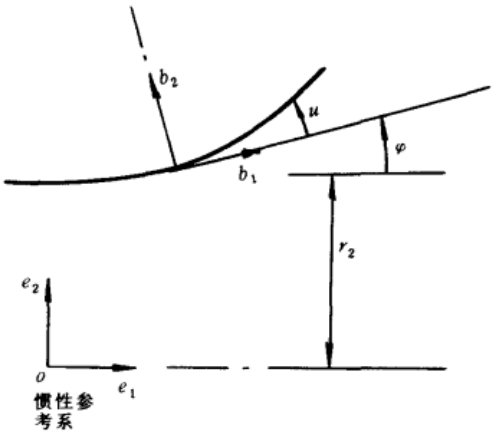


图 2-9　自由梁变形的混合坐标

注意这个方程是在小位移和小变形的基础上建立的. 而这一个假设，对于飞行器有时就不适宜了. 因为飞行器有时要作轨道转移或姿态调整. 前者要求飞行器的质心有相当大的刚体位移，后者则要求飞行器绕其质心作较大的刚体角位移. 当然，在这些位移发生的同时，还会有弹性振动位移. 尽管弹性振动还可能是微辐振动，但飞行器的总的运动位移却可能是相当大了. 这是问题的一方面，另一个更重要的方面是，人们关心并企图首先予以控制的又正是这些刚体位移和刚体角位移. 质心的刚体位移连同对应的速度称为飞行器的轨道参数，绕质心的刚体角位移又称为飞行器的姿态角，这些都是飞行器飞行动力学中最感兴趣的参数. 由于这两个问题，选取惯性参考系内的绝对位移 y 作为系统位形坐标显然就不够了，它不能满足建立控制模型的需求.

对于飞行器多柔体系统动力学，位形坐标的另一种选择，就是选取混合坐标 (hybrid coordinate). 这是 Meirovitch 和 Nelson 最先提出[60]，现被广泛采用了.

采用混合坐标时，在惯性参考系 $\underset{\sim}{e}^T=(e_1, e_2, e_3)$ 之外，再于飞行器的质心上设立一个连体坐标系 $\underset{\sim}{b}^T=(b_1, b_2, b_3)$. 这样连体坐标系坐标原点的刚体位移（及对应的速度）就是飞行器的轨道参数；而连体坐标系相对于惯性参考系的转角，就是飞行器的姿态角. 至于飞行器的弹性振动位移，则以其在连体坐标系内的相对位移 u 表示. 参看图 2-9.

用混合坐标法表达的动力学基本方程可以用 Lagrange 法推出. 采用 Lagrange 法时，先需定义 Lagrange 函数

$$L=T-U \tag{2-4-2}$$

为保持公式的一般性，我们考虑任意物体 B，而不限于梁式飞行器，如图 2-10. 上式中 T 是物体 B 的动能，U 是物体 B 的应变能.

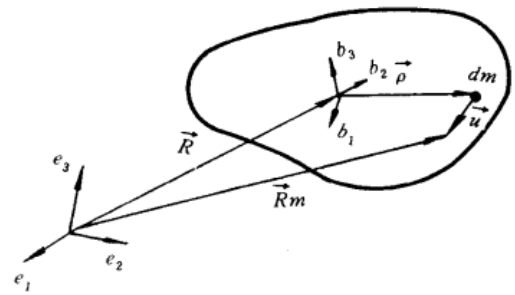


图 2－10　混合坐标

物体 B 的动能定义为

$$T = \frac{1}{2}\int_B \vec{v}_m \cdot \vec{v}_m \, dm \tag{2-4-3}$$

其中 dm 是物体上的一个微元质量；$\vec{v}_m$ 是该微元质量的速度；$\int_B (\cdots) dm$ 表示积分遍及整个物体 B. 显然，物体 B 上微元质量的速度应该是微元质量 dm 的位置向量 $\vec{R}_m$ 在惯性参考系内的时间导数，即

$$\vec{v}_m = \frac{D\vec{R}_m}{Dt} \tag{2-4-4}$$

又由图 2－10 可见

$$\vec{R}_m = \vec{R} + \vec{\rho} + \vec{u} \tag{2-4-5}$$

其中 $\vec{R}$ 是连体坐标系的原点的位置向量，在惯性参考系 $\underset{\sim}{e}^T = (e_1, e_2, e_3)$ 内定义，$\vec{\rho}$ 是微元质量 dm 在连体参考系内的变形前位置，$\vec{u}$ 是该微元体的弹性位移，这两个向量都在连体坐标系 $\underset{\sim}{b}^T = (b_1, b_2, b_3)$ 内定义：

$$\vec{R} = \underset{\sim}{e}^T \underset{\sim}{R}, \quad \vec{\rho} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\rho}, \quad \vec{u} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{u} \tag{2-4-6}$$

式中 $\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{\rho}$ 和 $\underset{\sim}{u}$ 分别是 $\vec{R}$，$\vec{\rho}$ 和 $\vec{u}$ 的分量矩阵.

还注意连体坐标系 $\underset{\sim}{b}$ 相对于惯性坐标系 $\underset{\sim}{e}$ 有角速度 $\vec{\omega} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\omega}$，就是说连体坐标系 $\underset{\sim}{b}$ 是一个动参考系. 这样，应用附录 A 中关于求动参考系内向量时间导数的规则，将（2－4－5）代入到（2－4－4），可得到

$$\vec{v}_m = \frac{D\vec{R}}{Dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

这里，$\frac{d(\cdot)}{dt}$ 表示向量（·）在连体坐标系内的时间导数，就是说假定 $\underset{\sim}{b}$ 不随时间变化时的时间导数. 又显然 $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ 恒为零，因为 $\vec{\rho}$ 是微元质量 dm 在变形前距离连体坐标系原点的距离，它与时间无关. 这样，再简记

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\dot{\vec{u}}=\underset{\sim}{b}^T\dot{\underset{\sim}{u}}$$

和

$$\frac{D\vec{R}}{Dt}=\dot{\vec{R}}=\underset{\sim}{e}^T\dot{\underset{\sim}{R}}$$

还注意 $\vec{\omega}\times\vec{\rho}=-\vec{\rho}\times\vec{\omega}$，则有

$$\vec{v}_m=\dot{\vec{R}}-\vec{\rho}\times\vec{\omega}+\dot{\vec{u}}+\vec{\omega}\times\vec{u}$$

倘若我们再假设这里转动是缓慢的和弹性位移是小位移，这样 $\vec{\omega}\times\vec{u}$ 就可看作高阶微量而被略去，这样得到关于微元质量 dm 的速度表达式为

$$\vec{v}_m=\dot{\vec{R}}-\vec{\rho}\times\vec{\omega}+\dot{\vec{u}} \tag{2-4-7}$$

进一步，再用模态展开法表达弹性位移 $\vec{u}$，即令

$$\vec{u}=\sum\vec{T}_k\tau_k=\underset{\sim}{\vec{T}}\,\underset{\sim}{\tau}=b^T\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{\tau}$$

因而有

$$\dot{\vec{u}}=b^T\underset{\sim}{T}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}} \tag{2-4-8}$$

这里 $\vec{T}_k$ 是物体的第 k 阶固有模态向量，τ_k 是对应的模态坐标，$\underset{\sim}{T}$ 是模态阵 $\underset{\sim}{T}=[\underset{\sim}{T}_1,\ \underset{\sim}{T}_2,\ \cdots,\ \underset{\sim}{T}_N]$；$\underset{\sim}{\tau}$ 是模态坐标阵 $\underset{\sim}{\tau}^T=(\tau_1,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_N)$；还有 $\vec{T}_k=\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_k$，即 $\underset{\sim}{T}_k$ 是第 k 阶固有模态向量的分量矩阵. 将（2-4-7）和（2-4-8）代入（2-4-3）式，并注意 $\vec{\rho}\times\vec{\omega}=\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}\underset{\sim}{\omega}$，就可得出

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\int_B(\dot{\vec{R}}-\vec{\rho}\times\vec{\omega}+\dot{\vec{u}})\cdot(\dot{\vec{R}}-\vec{\rho}\times\vec{\omega}+\dot{\vec{u}})dm\\&=\frac{1}{2}\int_B(\underset{\sim}{e}^T\dot{\underset{\sim}{R}}-\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}\underset{\sim}{\omega}+\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}})^T(\underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{R}-\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}\underset{\sim}{\omega}+\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}})dm\end{aligned}$$

再注意

$$\underset{\sim}{e}^T\cdot\underset{\sim}{e}=\underset{\sim}{I},\quad\underset{\sim}{b}^T\cdot\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{I},\quad\underset{\sim}{e}^T\cdot\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{A}_{eb}\text{ 和 }\underset{\sim}{b}^T\cdot\underset{\sim}{e}=\underset{\sim}{A}_{be}$$

则上式经展开后可写为

$$\begin{aligned}T=\frac{1}{2}\int_B\{&\dot{\underset{\sim}{R}}^T(\dot{\underset{\sim}{R}}-\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{\rho}}\underset{\sim}{\omega}+\underset{\sim}{A}_{eb}\underset{\sim}{T}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}})-\underset{\sim}{\omega}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}^T(\underset{\sim}{A}_{be}\dot{\underset{\sim}{R}}-\tilde{\underset{\sim}{\rho}}\underset{\sim}{\omega}+\underset{\sim}{T}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}})\\&+\dot{\underset{\sim}{\tau}}^T\underset{\sim}{T}^T(\underset{\sim}{A}_{be}\dot{\underset{\sim}{R}}-\tilde{\underset{\sim}{\rho}}\underset{\sim}{\omega}+\underset{\sim}{T}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}})\}dm\end{aligned}$$

注意，$\dot{\underset{\sim}{R}}$，$\underset{\sim}{\omega}$，$\dot{\underset{\sim}{\tau}}$，$\underset{\sim}{A}_{eb}$ 和 $\underset{\sim}{A}_{be}$ 都是与积分变量 dm 无关的总体量，还注意 $-\tilde{\underset{\sim}{\rho}}^T=\tilde{\underset{\sim}{\rho}}$，上式可写作

$$\begin{aligned}T=\frac{1}{2}\{&\dot{\underset{\sim}{R}}^T(\dot{\underset{\sim}{R}}\,m-\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{S}}\underset{\sim}{\omega}+\underset{\sim}{A}_{eb}\underset{\sim}{P}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}})-\underset{\sim}{\omega}^T(\tilde{\underset{\sim}{S}}^T\underset{\sim}{A}_{be}\dot{\underset{\sim}{R}}-\underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{\omega}-\underset{\sim}{H}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}})\\&+\underset{\sim}{\tau}^T(\underset{\sim}{P}^T\underset{\sim}{A}_{be}\dot{\underset{\sim}{R}}+\underset{\sim}{H}^T\underset{\sim}{\omega}+\dot{\underset{\sim}{\tau}})\}\end{aligned}\tag{2-4-9}$$

这里

$$m=\int_B dm\quad\text{是物体 }B\text{ 的总质量}$$

$$\tilde{\underset{\sim}{S}}=\int_B \tilde{\underset{\sim}{\rho}}\,dm \quad \text{是物体 } B \text{ 的静矩的斜方阵}$$

$$\underset{\sim}{J}=\int_B \tilde{\underset{\sim}{\rho}}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}\,dm \quad \text{是物体 } B \text{ 的惯矩张量} \tag{2-4-10}$$

$$\underset{\sim}{P}=\int_B \underset{\sim}{T}\,dm \quad \text{称为模态动量系数}$$

$$\underset{\sim}{H}=\int \tilde{\underset{\sim}{\rho}}\,\underset{\sim}{T}\,dm \quad \text{称为模态角动量系数}$$

$\underset{\sim}{P}$和 $\underset{\sim}{H}$在一些文献里又称为柔性耦合系数．在上面推导中，我们还用到模态阵的规格化正交条件 $\int_B \underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{T}\,dm=\underset{\sim}{I}$.

物体的应变能 U 在采用模态坐标 $\underset{\sim}{\tau}$ 后，可表达为

$$U=\frac{1}{2}\underset{\sim}{\tau}^T\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\tau} \tag{2-4-11}$$

这里 $\underset{\sim}{\Lambda}$是以物体的固有频率的平方为主元的对角方阵，参看附录 B.

将（2-4-9）和（2-4-11）代入到 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underset{\sim}{q}}}-\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{q}}=\underset{\sim}{Q}_q$$

其中 $\underset{\sim}{Q}_q$ 为广义力，$\dot{\underset{\sim}{q}}^T=(\dot{\underset{\sim}{R}}^T,\ \underset{\sim}{\omega}^T,\ \dot{\underset{\sim}{\tau}}^T)$ 是广义坐标的时间导数，$\underset{\sim}{q}=(\underset{\sim}{R}^T,\ \underset{\sim}{\varphi}^T,\ \underset{\sim}{\tau}^T)$ 是广义坐标，$\dot{\underset{\sim}{\varphi}}$被定义为 $\underset{\sim}{\omega}$，而 $\underset{\sim}{\varphi}$只是伪坐标，因为 $\underset{\sim}{\varphi}$不是与 $\underset{\sim}{\omega}$对应的角向量分量．这样则有以下动力学基本方程：

$$\begin{aligned}
&m\ddot{\underset{\sim}{R}}-\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{S}}\,\dot{\underset{\sim}{\omega}}+\underset{\sim}{A}_{eb}\underset{\sim}{P}\,\ddot{\underset{\sim}{\tau}}=\underset{\sim}{Q}_R\\
&-\tilde{\underset{\sim}{S}}^T\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{\underset{\sim}{R}}+\underset{\sim}{J}\,\dot{\underset{\sim}{\omega}}+\underset{\sim}{H}\,\ddot{\underset{\sim}{\tau}}=\underset{\sim}{Q}_\varphi\\
&\underset{\sim}{P}^T\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{\underset{\sim}{R}}+\underset{\sim}{H}^T\dot{\underset{\sim}{\omega}}+\ddot{\underset{\sim}{\tau}}+\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\tau}=\underset{\sim}{Q}_\tau
\end{aligned} \tag{2-4-12}$$

这是一个线性化了的方程，注意在线性化过程中，我们没有对 $\underset{\sim}{R}$和 $\underset{\sim}{\varphi}$（与角速度向量 $\underset{\sim}{\omega}$对应的姿态角）做任何约定，只规定 $\vec{u}$ 和 $\vec{\omega}$ 应是小量，即只做了弹性小位移和缓慢转动的假设.

在（3-4-12）式中，$\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{\omega}$（因而是对应的姿态角 $\underset{\sim}{\varphi}$）和 $\underset{\sim}{\tau}$都显式地列入到方程中，这对于飞行器控制设计是十分方便的．因为通常在考虑轨道转移时，我们特别关心 $\underset{\sim}{R}$；在考虑姿态控制或指向保持时我们特别关心姿态角 $\underset{\sim}{\varphi}$；而在考虑振动抑制或形状保持时我们特别关心 $\underset{\sim}{\tau}$．这组方程显然很容易适应不同考虑下的需要.

对于多柔体系统，每一个体都有一组混合坐标．一般说来，它包括了该体 B_k 相对于其相邻内接体的转角和该体在连体基 b_k 内的相对弹性位移．前者的相对角速度记作 $\vec{\Omega}_k$，对应的角位移是伪坐标 $\underset{\sim}{\varphi}_k$．相对弹性位移用模态坐标 $\underset{\sim}{\tau}_k$ 表示.

在这里我们再说明一句，在本节开始，针对梁式飞行器，我们曾说到连体坐标系的原点取在飞行器的质心处．但对于多柔体系统中的任一个体来说，连体坐标系的原点应取在所在体的内接铰上．我们还注意，对于根体常假设其质心（或更一般说在其位移能反映多体系统总体运动的特定点）上设有内接铰．因此，规定连体坐标系原点放在所在

体的内铰处的提法具有一般性. 按照这样规定，图 2－11 的单臂杆的机械臂的连体坐标系原点应放在铰链 h_1 处.

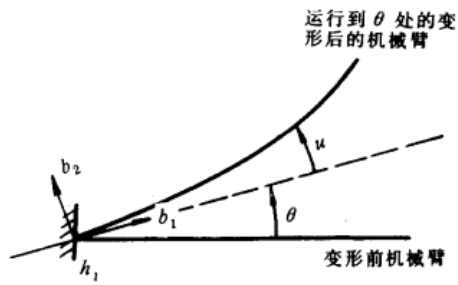


图 2－11　简单机械臂的连体坐标系

在本节最后，我们再说明一下耦合系数 $\underset{\sim}{P}$ 和 $\underset{\sim}{H}$. 由于（2－4－12）式的第一式表示作用在物体上的主矢为零；第二式表示作用在物体的主矩为零，由此可见 $\underset{\sim}{P}\ddot{\underset{\sim}{r}}$ 和 $\underset{\sim}{H}\ddot{\underset{\sim}{r}}$ 事实上分别代表了由于弹性位移的惯性力所引起的主矢和主矩. 它们都是向量，又注意 r 只是模态坐标，是标量，因此模态动量系数 $\vec{P}$ 和模态角动量系数 $\vec{H}$ 都是向量. 这样，我们可以有

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{P} = \int_B \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}\,dm = \int_B \vec{\underset{\sim}{T}}\,dm \\ \vec{H} &= \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{H} = \int_B b^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}\,\underset{\sim}{T}\,dm = \int \vec{\underset{\sim}{\rho}}\times\vec{\underset{\sim}{T}}\,dm\end{aligned} \qquad (2-4-13)$$

式中 $\vec{\underset{\sim}{T}} = [\vec{T}_1, \cdots, \vec{T}_k, \cdots, \vec{T}_N]$. （2－4－13）式的两个表达式在后面讨论惯性完备性准则时很有用处.

§5. 连体参考系的设定

B_k 体的连体坐标系 $\underset{\sim}{b}_k$ 定义为原点在该体内接铰 h_k 处的一组直角坐标系. 对其各坐标轴方向如何设定无需硬性规定. 但是出于规范化和编制程序方便的考虑，作一些规定是有好处的. 事实上在机器人学已经这样做了，在那里采用了齐次转换矩阵（又称 Denavit－Hartenburg 矩阵），与这种转换矩阵相对应的，对连体坐标系有一组特定的设立规则. 它原定义于刚性机械臂，但稍加引伸，也可用于柔性臂杆情况.

先考虑刚性臂杆情况.

我们注意刚性机械臂的臂杆是一个似梁结构，就是说它的一个尺寸（长度）远较其他尺寸（横截面的宽和高）为大；此外相邻两臂杆间装有一个柱铰. 也就是说它的关节处只有一个转动自由度. 图 2－12 是两个相邻臂杆的示意图. 关节 1 是内侧（靠近根体）的关节（即内铰），该处的连体坐标系已设定为 $\underset{\sim}{b}_1^T = (b_{11}, b_{12}, b_{13})$. 现设立关节 2 处的连体坐标系 $\underset{\sim}{b}_2^T = (b_{21}, b_{22}, b_{23})$，为此，规定如下：（参看图 2－12，(b)）

1. b_{23} 的轴线永远与柱铰 2 的轴线重合，指向适当选定. 另外请注意在图 2－12，b 中，

b_{13}的轴线则已经设定与关节 1 处柱铰轴线一致.

2. 令 b_{21}是 b_{13}与 b_{23}的共同的垂线. b_{21}在 $b_{11}b_{12}$平面内的投影线与 b_{11}的夹角记作 θ. b_{13}与 b_{23}（同垂直于 b_{21}）绕 b_{21}的相对夹角记作 α. 注意 b_{13}和 b_{23}是关节 1 和关节 2 的柱铰轴线，它们间的夹角 α 自然是不变的常量. 至于 θ 角则随着机械臂臂杆运动而改变.

3. b_{22}由 b_{21}和 b_{23}依右手定则定出.

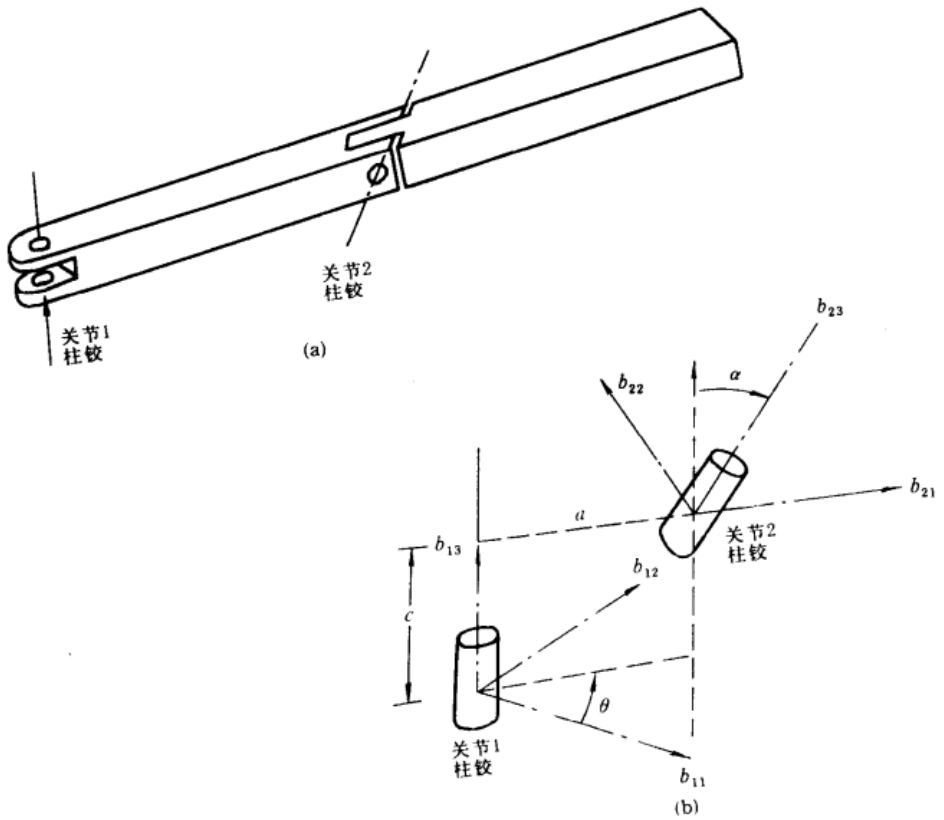


图 2-12　机械臂的 Denavit-Hartenburg 坐标系

这样，$\underline{b}_2$ 坐标系的原点在 $\underline{b}_1$ 坐标系内的位置可由三个量定出，除去 θ 角外，一个是沿 b_{13}的距离 c，还有一个是在 $b_{11}b_{12}$平面内投影长度（或者说沿 b_{21}量取的距离）a. 这样，在臂杆 1-2 上的铰间向量$\vec{l}=\underline{b}_1^T\underline{l}$的三个分量就是 $\underline{l}^T=$（$a\cos\theta$，$a\sin\theta$，c）.

至于两个连体参考系间的转换矩阵 $\underline{A}_{12}$可以这样得出. 先使 $\underline{b}_2$ 与 $\underline{b}_1$ 的相应基向量完全重合，由此出发，先绕 b_{13}转 θ 角，然后再绕 b_{21}转动 α 角. 这样

$$\begin{aligned}\underline{A}_{12}&=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\cos\alpha & \sin\theta\sin\alpha\\ \sin\theta & \cos\theta\cos\alpha & -\cos\theta\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\end{aligned}\qquad(2-5-1)$$

至于 Denavit-Hartenburg 齐次变换矩阵则定义为

$$\underset{\sim}{T}_{12}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{A}_{12} & \underset{\sim}{l}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

这是一个（4×4）的矩阵，其中 $\underset{\sim}{l}$ 是臂杆 1－2 铰间向量的分量矩阵.

一些在机械人领域工作的研究者曾经采用这个齐次矩阵建立动力学方程，但在后继研究中他们指出这样做降低了计算效率. 因此在建立动力学方程的应用中仍采用（2－5－1）式的 $\underset{\sim}{A}_{12}$ 坐标变换阵.

为了说明这个设置连体参考系（连体基）的方法，可举一个例子.

首先考虑图 2－13 的空间机械臂. 除去根体 B_1（取在“基座”上）外，它共由 B_2，B_3，…，B_6 共 5 个臂杆组成. 在每个关节处用箭头表示出了它的转动自由度. h_2 是最靠近基座 B_1 的体 B_2 的内铰，铰上的连体基 b_{23} 首先被确定下来. 为了说明问题方便，我们标定一组基准方向：x 是沿 B_3 到 B_6 诸臂轴方向；z 是垂直向上的. 如果说 $x-z$ 平面与纸面重合，y 就定为指向纸面的. 这样 b_{23} 应沿 z 方向，因为这是第一组坐标系，b_{21} 和 b_{22} 可以有一点任意性，我们令它们分别与 x 和 y 一致. 再看铰 h_3 处的连体基 $\underset{\sim}{b}_3$，它是固连在体 B_3 上的. 这里转动自由度是绕平行于 y 轴的轴线的，因此 b_{33} 取方向平行 y 轴. 又注意 b_{33} 与 h_2 上的 b_{23} 在平行于 $y-z$ 平面内，因此，同时垂直于 b_{33} 和 b_{23} 的 b_{31} 应沿 x 轴. 跟下来适当选定指向后，可以定出 b_{32}. 再看 B_4 在 h_4 处的连体参考系 $\underset{\sim}{b}_4$. 按规定先设定 b_{43} 它显然应是平行于 y 轴的. 又由于 b_{43} 与 b_{33} 平行，因此 b_{41} 也沿 x 轴，随之可定出 b_{42}. 再考查 $\underset{\sim}{b}_5$. 首先应设定 b_{53}，按规定在这里它应沿 y 轴方向，因为 h_5 关节处转动角度只能绕平行于 y 轴的轴线. 又由于 b_{53} 与 b_{43} 都平行于 y 轴，这样就定下了 b_{51}. 再适当调整一下指向，可依右手定则定出 b_{52}. $\underset{\sim}{b}_6$ 的三个基向量请读者试着自行给出. 这五组连体基都示意地画在图 2－13 中. 至于连体基的另四个参量 θ，α 和 a 及 c，我们给出在表 2－1 中. 参看图 2－13 上各连体基方位示意图，不难解释表 2－1 的正确.

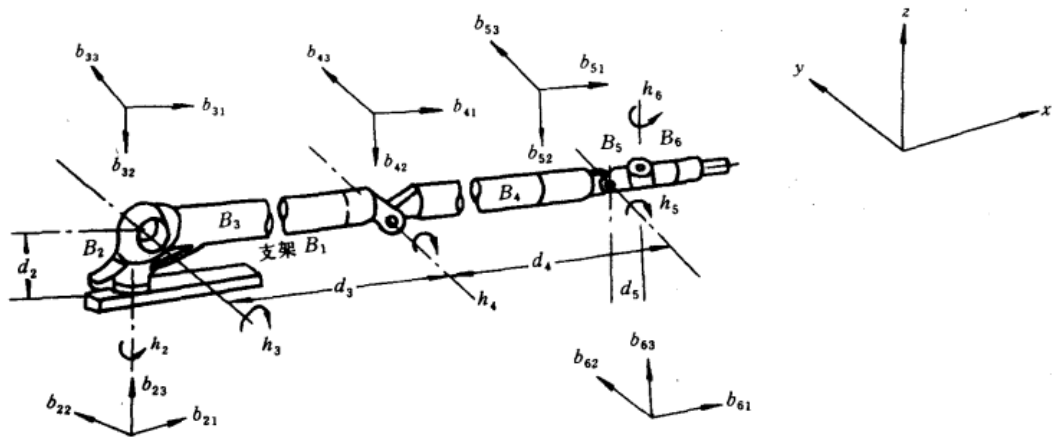


图 2－13　空间遥控机械臂的连体坐标系

表 2－1

参数 / $\underline{b}_k$	θ	α	a	c	$\underline{b}_k$ 原点坐标，在 $\underline{b}_{k-1}$ 内定义
$\underline{b}_2$	0	0	0	0	(0, 0, 0)
$\underline{b}_3$	0	$-\pi/2$	0	d_2	(0, 0, d_2)
$\underline{b}_4$	0	0	d_3	0	(d_3, 0, 0)
$\underline{b}_5$	0	0	d_4	0	(d_4, 0, 0)
$\underline{b}_6$	0	$\pi/2$	d_5	0	(d_5, 0, 0)

上述建立连体坐标系的方法，原则上也可以应用于飞行器．因为飞行器的相当一部分弹性部件都是似梁结构；即使有些部件是似钣结构，它的铰链也是柱铰为多．

例如图 2－14 的带有若干附件（或称部件）的卫星．星体连同太阳帆板记为 B_1，取作根体．对于卫星本体，它的连体参考系在飞行力学中有明确规定：b_{11}（或称 x 方向）沿卫星前进方向，b_{13}（或称 z 方向）指向地心，b_{12}（或称 y 方向）由右手定则定出．其他各体则可按本节所述方法建立其连体参考系．这里要说的是仪器撑杆 B_5，它绕 B_1 根体有两个自由度．为此，我们在 B_5 与 B_1 之间增加一个虚体 B_4．虚体没有惯性和弹性，它相对 B_1 有一个自由度，例如是图 2－14 中在 B_4 处的绕水平轴的自由度．另一个绕垂直轴的自由度就看作是 B_5 体相对 B_4 体的自由度．这样就符合本节所述的建立连体参考系的前提：两体间关节上的铰是柱铰．各体的连体基方向示意地画在图 2－14 中，读者试予以验证．至于各连体参考系 $\underline{b}_k$ 的原点在其内接连体参考系内的位置，可以由系统的几何尺寸很容易得出如下：

$\underline{b}_2$ 原点坐标$\left(0,\ 0,\ -\dfrac{h}{2}\right)$，在 $\underline{b}_1$ 内定义；

$\underline{b}_3$ 原点坐标 $(0,\ 0,\ f)$，在 $\underline{b}_2$ 内定义；

$\underline{b}_4$ 原点坐标 $\left(0,\ \dfrac{g}{2},\ 0\right)$，在 $\underline{b}_1$ 内定义；

$\underline{b}_5$ 原点坐标 $(0,\ 0,\ 0)$，在 $\underline{b}_4$ 内定义；

对于具有似钣结构附件的飞行器（如图 2－15），只要铰是柱铰，原则上也可采用这里介绍的设置连体坐标系的方法．当然需要有所变通．这里要坚持的是仍保持 b_{k3} 与 h_k 柱铰轴线一致；每个体上只有一个柱铰（倘自由度多于 1 个时，可采用虚体）．另外，可以令 b_{k1} 在似钣部件的钣平面内．连体参考系原点的位置，以及 α 和 θ 都可以由结构的原始数据给出．

最后再讨论部件（例如臂杆）是有弹性的情况．在这种情况，我们在该弹性部件 B_k 的外铰 h_j 处再增加一组坐标参考系 $\underline{b}_{k'}$，它固连于 B_k 体的外铰 h_j 处．注意 h_j 铰的外接体是 B_j，其连体参考系 $\underline{b}_j$ 是固连在 B_j 体上的．现在我们来确定 $\underline{A}_{kj}$，即 $\underline{b}_k$ 与 $\underline{b}_j$ 间的转换矩阵，这里 $\underline{b}_k$ 是 B_k 体的连体坐标系，参看图 2－16．如与本节开始的讨论对照（参看图 2－12），这里的 h_k 即图 2－12 中的 h_1，h_j 即那里的 h_2．图 2－16 只是将图 2－12 分开表示而已．倘若 B_k 是刚体，则 $\underline{b}_{k'}$ 与 $\underline{b}_k$ 取得方位一致，即它们间的转换阵 $\underline{A}_{kk'}$ 是单位矩阵 I．倘若 B_k 有弹性时，$\underline{b}_{k'}$ 当然相对于 $\underline{b}_k$ 有相对的位移．图 2－17 以似梁结构为例示意地给出

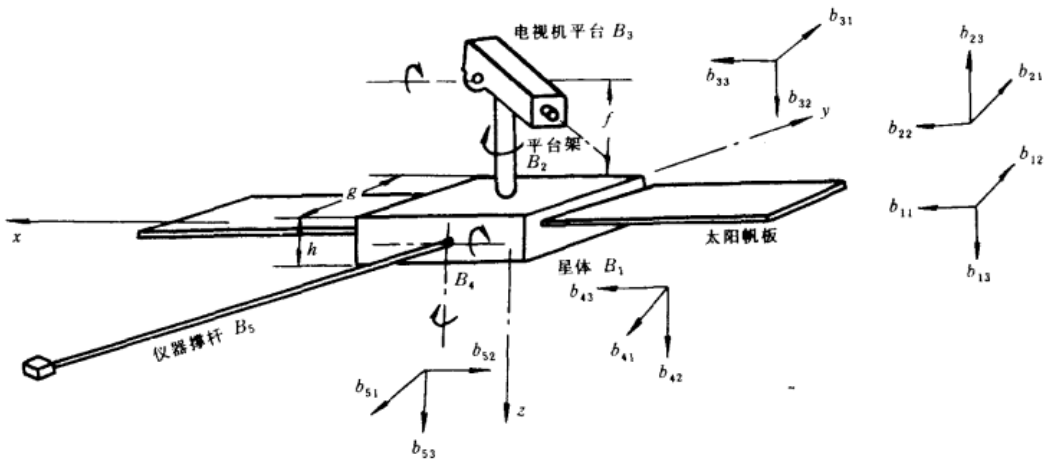


图 2－14　带有多个附件的卫星

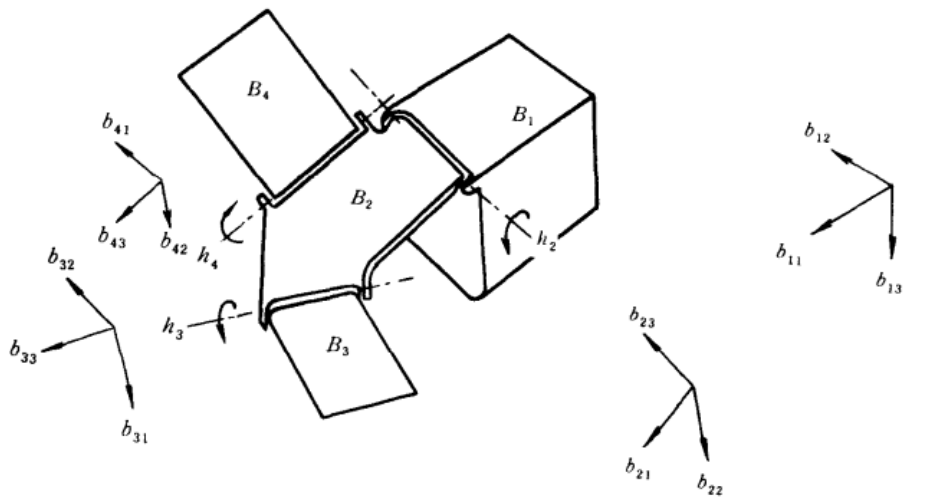


图 2－15　带似钣附件的卫星的连体坐标系

了弹性线位移 $\vec{\Delta}$和弹性转角 $\vec{\beta}$. 弹性位移 $\vec{\Delta}$和 $\vec{\beta}$在本章第 3 节的（2－3－4）和(2－3－10)式中分别记作 $\vec{\Delta}_j$ 和 $\vec{\beta}_j$. 弹性转角 $\vec{\beta}$使 $\underset{\sim}{b}_{k'}$ 与 $\underset{\sim}{b}_k$ 间方位不一致，就是说其转换矩阵将异于单位矩阵 $\underset{\sim}{I}$而是 $\vec{\beta}$ 的函数，即 $\underset{\sim}{A}_{kk'}=\underset{\sim}{A}_{kk'}(\vec{\beta})$，其确定参看附录 A 之§5. 这样 B_j 的连体参考系 $\underset{\sim}{b}_j$ 相对于 B_k 连体参考系 $\underset{\sim}{b}_k$ 的转换阵 $\underset{\sim}{A}_{kj}$可以根据转换矩阵的链式规则给出为

$$\underset{\sim}{A}_{kj}=\underset{\sim}{A}_{kk'}(\vec{\beta})\underset{\sim}{A}_{k'j} \qquad (2-5-2)$$

这里 $\underset{\sim}{A}_{k'j}$的含义同于（2－5－1）式中的 $\underset{\sim}{A}_{12}$.

显然当 B_k 为刚体时，$\underset{\sim}{A}_{kk'}=\underset{\sim}{I}$，这时 $\underset{\sim}{A}_{kj}$即为（2－5－1）式的 $\underset{\sim}{A}_{12}$.

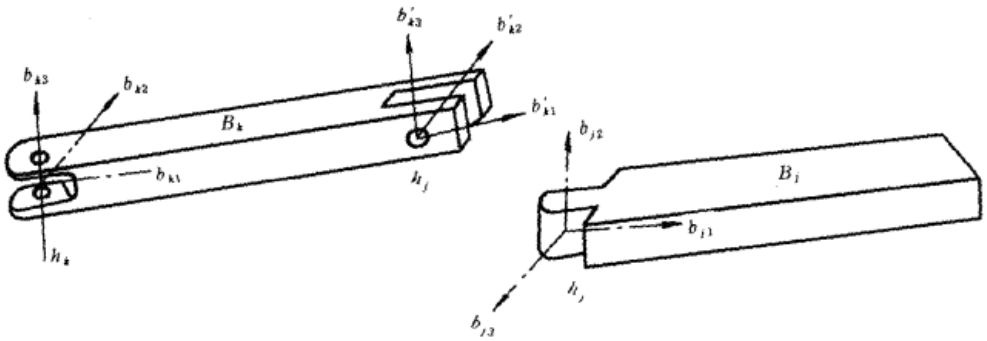


图 2－16　柔性机械臂的坐标转换关系

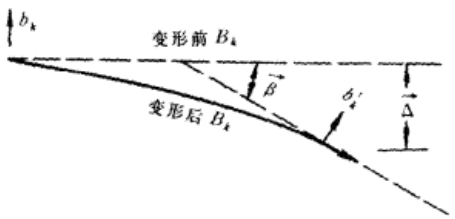


图 2－17　似梁结构的外铰弹性位移 $\vec{\Delta}$和转角 $\vec{\beta}$

第三章　多柔体系统动力学方程的建立

§1. 引　　言

在建立多柔体系统动力学方程时，向量力学和分析力学的方法全被使用了．向量力学中使用最多的是Newton-Euler方法，首先是被用于建立多刚体系统动力学，稍后又由Nguyen和Hughes将动量进行有限元离散化后应用于推导带有柔性部件的卫星．再晚，Shabana又用广义Newton-Euler法建立多柔体系统动力学方程[71]．Newton-Euler法又称为d'Alembert原理，主要考虑惯性力与主动力和约束力的平衡，对于柔性体当然还要考虑弹性力．这个方法物理概念清楚，在处理模块增长结构时很方便．所谓模块增长结构是指像机器人这样的系统，在工作时要攫取或释放重物．就是说原为N个体的系统，在工作时会增加为$N+1$个体或减少为$N-1$个体．对其他方法，模块增长前后的方程要分别推出；对于Newton-Euler法，模块增长后只需续增方程，无需重推．有的文献称之为有良好的开放性．这是Newton-Euler法的优点．但是这一方法，需消除约束力，这是一件很麻烦的工作．

在建立多柔体系统动力学方程时，分析力学中的很多种方法全被用过．本章拟重点介绍虚功原理（又称虚功形式的d'Alembert原理）、Lagrange法及Kane方法．虚功原理概念明确，推导过程繁而不难，较易应用．Lagrange方法在完整系统中应用很广．Lagrange第一类方程（又称Lagrange乘子法）在处理有完整约束的动力学系统时，十分方便而漂亮．但是用Lagrange方法时，需对时间求导数．这一过程不仅繁冗，对于多柔体系统，由于系统构形是随时间变化的，更增加求导过程的复杂性．Kane方法是近20多年发展起来的一个方法，又称为虚功率形式或Gibbs形式的d'Alembert原理．这个方法兼有Newton-Euler法和Lagrange方法的主要优点，很受一些研究者的偏爱．不过这个方法采用的偏速度概念，在应用中对于初学者较难掌握．

这是几个目前在建立多柔体系统动力学方程时常用的方法．在本章里我们先扼要回忆一下一些方法的主要概念和公式，再将其应用于多柔体簇系统动力学方程的建立．多柔体簇系统是拓扑关系最简单的系统，便于建立基本概念．然后再推导多柔体链系统动力学方程，这个系统的描述还不很复杂．

本章着重介绍了多柔体簇系统和多柔体链系统，这是两个拓扑关系较简单的系统．对于多柔体树系统，原则上可以用多体链系统的思路处理，不过因为拓扑描述复杂，组织方程及编制程序并不方便．通常都把多柔体树系统处理为有约束的系统来建立它的动力学方程．至于有回路的多柔体系统确实由拓扑结构上讲也是有约束系统．我们将这两类多柔体系统合称为一般多柔体系统，并以第二章所说向量链形式的运动学关系为基础，用Lagrange第一类方程（又称Lagrange乘子法）推导其动力学方程．

由于虚功方程、Lagrange方程和Kane方程是相互平行的，因此可将第一类Lagrange方程的Lagrange乘子法平行地用于Kane方程和虚功方程，得出带有待定乘子的

Kane 方程和带有待定乘子的虚功方程. 本章介绍了这两种方程，并用来推导一般多柔体系统的动力学方程.

§2. 虚功原理

虚功原理是力学中的一个基本原理. 我们在理论力学、结构力学和弹性力学的教科书中都可以找到关于虚功原理的叙述. 在那里虚功原理被称为虚位移原理，并主要用来解决具有理想约束的系统的静力学问题. 把虚位移原理与 d'Alembert 原理结合起来，就成为可以解决具有理想约束系统的动力学问题的虚功原理，在一些文献中又称之为虚功形式的 d'Alembert 原理.

在虚功原理中，理想约束和虚位移是两个最重要的概念. 为说明问题具体起见，我们考虑一个具有 N 个质点的动力学系统，它的 d'Alembert 平衡方程可以写作

$$-m_i\vec{a}_i+\vec{f}_{ei}+\vec{f}_{ci}=0,\quad i=1,2,\cdots,N \tag{3-2-1}$$

其中 m_i 是质点 i 的质量，$\vec{a}_i$ 是质点 i 的加速度，$\vec{f}_{ei}$和 $\vec{f}_{ci}$分别是质点 i 上的主动力和约束反力. (3-2-1) 是向量形式的 d'Alembert 平衡方程. 我们可以改写成标量形式：

$$-m_ka_k+f_{ek}+f_{ck}=0\quad k=1,2,\cdots,3N \tag{3-2-2}$$

这里方程共有 $3N$ 个，因为每个质点有 3 个自由度，因此 N 个质点的质点系共有 $3N$ 个自由度. (3-2-2) 式描述的是在第 k 个自由度方向（称为广义坐标 q_k 方向）的平衡方程. 这里的 f_{ck}应是所有诸约束的反力在此 q_k 方向的投影之和，即

$$f_{ck}=\sum_{j=1}^{m}f_{ck}^{j} \tag{3-2-3}$$

其中 f_{ck}^{j}是由第 j 个约束提供的约束反力 f_c^j 在 q_k 方向的投影，$\sum_{j=1}^{m}$ 表示总和包括全部 m 个约束. 注意这里我们以上标 j 表示该约束力是由第 j 个约束提供的. 第 j 个约束可写为

$$\varphi_j=\varphi_j(q_1,q_2,\cdots,q_{3N},t)=0,\quad j=1,2,\cdots,m \tag{3-2-4}$$

约束方程 (3-2-4) 表示在 $3N$ 维位形空间内的一个超曲面.

所谓理想约束就是指该约束表面是绝对光滑的(倘约束表面有摩擦，这时可以将摩擦力视为主动力)，这样约束反力只能是与该约束表面垂直的；或者说约束反力只能是与约束表面的外法线方向一致的.

倘若将约束方程(3-2-4)改写成微分形式：

$$\sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_k}dq_k+\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}dt=0$$

或

$$\sum_{k=1}^{3N}A_{jk}dq_k+B_jdt=0 \tag{3-2-5}$$

式中

$$A_{jk}=\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_k} \tag{3-2-6}$$

$$B_j=\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}$$

式中 A_{jk}就是 φ_j 表面的外法线在 q_k 方向的投影. 由 A_{jk}组成的列阵 $\underset{\sim}{A}_j^T=(A_{j1},A_{j2},\cdots,A_{j3N})$就是 φ_j 约束表面的外法线单位向量阵.

显然,理想约束的反力应与约束表面垂直意味着:倘将 f_c^j 在这 $3N$ 个广义坐标($q_1\cdots q_k\cdots q_{3N}$)方向投影,其在 q_k 方向上的投影分量 f_{ck}^j应该与 B_{jk}的方向一致:

$$\lambda_j=f_{c1}^j/A_{j1}=\cdots=f_{ck}^j/A_{jk}=\cdots=f_{c3N}^j/A_{j3N} \tag{3-2-7}$$

倘记 $\underset{\sim}{f}_c^{jT}=(f_{c1}^j,f_{c2}^j,\cdots,f_{c3N}^j)$是 f_c^j 在 $3N$ 个广义坐标方向的分量;$\underset{\sim}{A}_j^T=(A_{j1},\cdots,A_{j3N})$是 φ_j 的外法线的单位向量在 $3N$ 个广义坐标方向的分量,则上式又可写作

$$\underset{\sim}{f}_c^j=\lambda_j\underset{\sim}{A}_j \tag{3-2-8}$$

这里 λ_j 称为 Lagrange 乘子,或更一般地称为待定乘子,其物理概念是 φ_j 的约束反力大小的表征.

现在,再定义虚位移. (3-2-5)式中的 dq_k 称为真实广义位移增量,注意它与 dt 和系统的动力学方程有关. 虚位移则定义为只由广义坐标等时变分引起的无穷小位移,它满足约束条件

$$\sum_{k=1}^{3N}A_{jk}\delta q_k=0 \tag{3-2-9}$$

或

$$\underset{\sim}{A}_j^T\delta\underset{\sim}{q}=0 \qquad j=1,2,\cdots,m$$

就是说虚位移是时间不参加变分($\delta t=0$)时约束所允许的无穷小位移增量. (3-2-9)式的另一个含义是虚位移 $\delta\underset{\sim}{q}^T=(\delta q_1,\cdots,\delta q_{3N})$是与外法线 $\underset{\sim}{A}_j$ 相互正交的.

约束反力在虚位移上作的虚功可以记作

$$\delta W_c=\sum_{k=1}^{3N}f_{ck}\delta q_k$$

将(3-2-3)代入得

$$\delta W_c=\sum_{k=1}^{3N}\Big(\sum_{j=1}^{m}f_{ck}^j\Big)\delta q_k=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{3N}f_{ck}^j\delta q_k$$

再将(3-2-7)的 $f_{ck}^j=\lambda_jA_{jk}$代入,得

$$\delta W_c=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{3N}\lambda_jA_{jk}\delta q_k=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Big(\sum_{k=1}^{3N}A_{jk}\delta q_k\Big)$$

根据(3-2-9)可知上式的$\Big(\sum_{k=1}^{3N}A_{jk}\delta q_k\Big)=0$,因此

$$\delta W_c=\sum_{k=1}^{3N}f_{ck}\delta q_k=0$$

这就证明了理想约束反力在虚位移上作功的总合恒为零.

现在我们再回到(3-2-2)式的平衡方程组. 由于平衡,该式右端恒为零. 两侧同时乘以虚位移(位移的变分或位移的虚增量)后,全式仍为零;再对这 $3N$ 个方向求总和,其结果仍恒为零,即

$$\sum_{k=1}^{3N}(-m_ka_k+f_{ek})\delta q_k+\sum_{k=1}^{3N}f_{ck}\delta q_k=0$$

其中第 3 项根据理想约束条件应恒为零,这样有

$$\sum_{k=1}^{3N}(-m_ka_k+f_{ek})\delta q_k=0$$

上式是在 $3N$ 个自由度方向的平衡方程的基础上给出的．当然还可根据(3－2－1)式写作

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\vec{a}_i+\vec{f}_{ei})\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

上两式又可以写作

$$\delta W_I+\delta W_e=0 \tag{3-2-10}$$

即惯性力虚功 δW_I 与主动力虚功 δW_e 的总和为零．其中

$$\delta W_I=-\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i\cdot\delta\vec{r}_i \tag{3-2-11}$$

是惯性力虚功；

$$\delta W_e=\sum_{i=1}^{N}\vec{f}_{ei}\cdot\delta\vec{r}_i \tag{3-2-12}$$

是主动力虚功；$\sum_{i=1}^{N}$ 表示总和遍及系统所包括的全部质点．

(3－2－10)式称为虚功原理，它表示，在理想约束条件下，质点系处于平衡的充要条件是它的惯性力虚功与主动力虚功的总和应恒为零．虚功原理是平衡方程(3－2－1)的等效表达．

将(3－2－10)的虚功原理，连同(3－2－4)的约束条件合在一起，可建立起质点系的动力学方程．

虚功原理还可推广到弹性体．这时每个微元素 dm 可以看作是一个质点，因而惯性力虚功 δW_I 和主动力虚功 δW_e 的表达式分别写作

$$\delta W_I=-\int_\sigma\vec{a}\cdot\delta\vec{r}dm \tag{3-2-13}$$

$$\delta W_e=\int_\sigma\vec{f}\cdot\delta\vec{r}dm \tag{3-2-14}$$

即在(3－2－11)和(3－2－12)中以 dm 代替 m_i 并令 $\vec{f}_{ei}=\vec{f}dm$，再以积分符号代替总和符号就可以了．这里 $\int_\sigma(\cdots)dm$ 表示积分遍及整个系统．此外，由于微元质量上还有弹性内力，因此在虚功中还应增加内力虚功 δW_N．注意按定义，内力虚功是虚应变能冠以负号，即

$$\delta W_N=-\delta U \tag{3-2-15}$$

这样，对于弹性体，虚功原理表达为

$$\delta W_I+\delta W_e-\delta U=0 \tag{3-2-16}$$

将(3－2－16)式和(3－2－4)式联合在一起在某些热力学条件下(如等温、绝热或一般的熵原理成立等)可以建立弹性体的动力学方程．应变能的确定见附录 B，在下一节还将说明．

§3. 用虚功方程建立多柔体簇系统的动力学方程[105,111,54]

多柔体簇系统是一类最简单的多柔体系统．它由一个中心体和若干个弹性附件所组成．带有弹性附件(太阳帆板、大型天线等)的卫星和飞船以及空间站都可以模化为多柔体

簇系统. 图 3－1 给出多柔体簇系统的示意图. 在图中，B 是中心体，也就是第二章中所说的根体. 根体上有个参考点 CM，它的运动可以代表整个多柔体簇系统(可能为航天器)的整体的运动. A_j 表示系统的第 j 个弹性附件. h_j 是附件 A_j 与中心体间的铰链，也是 A_j 附件的内铰. $\underline{e}$ 是惯性坐标系；$\underline{b}$ 是中心体的连体坐标系，原点在 CM 上；$\underline{a}_j^T=(a_{j1},a_{j2},a_{j3})$ 是附件 A_j 的连体坐标系，原点设在附件 A_j 的内铰 h_j 处. 在建立动力学方程时，我们假设各弹性体的变形是小位移并不计较关节的碰撞和摩擦，此外不作其他假设.

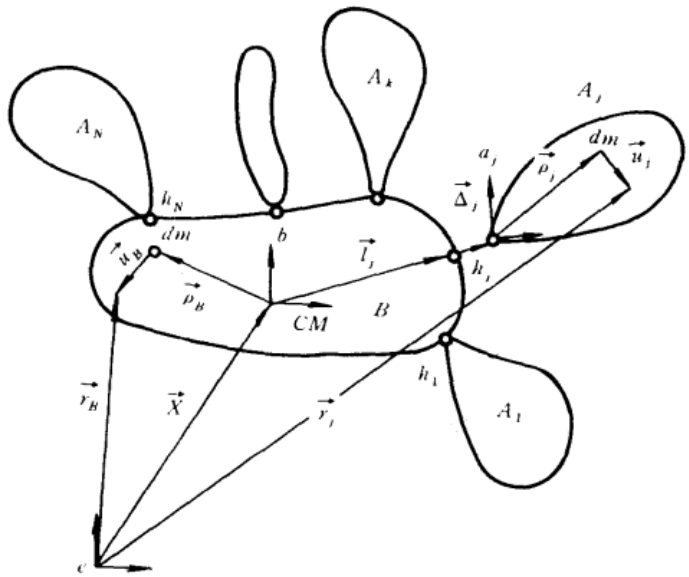


图 3－1　多柔体簇系统的向量关系

为了应用(3－2－16)式的虚功原理的方程，我们需要分别求系统的虚应变能 δU，惯性力虚功 δW_I 和主动力虚功 δW_e. 这里首先讨论惯性力虚功. 显然系统的惯性力虚功 δW_I 是中心体的惯性力虚功 δW_{IB} 和各附件的惯性力虚功 δW_j 的总和，即

$$\delta W_I=\delta W_{IB}+\sum_{j=1}^{N}\delta W_j \tag{3－3－1,a}$$

同样，系统的虚应变能 δU 等于系统各体虚应变能之和，即

$$\delta U=\delta U_B+\sum_{j=1}^{N}\delta U_j \tag{3－3－1,b}$$

这里 N 是附件的总数.

首先考虑中心体的惯性力虚功 δW_{IB}. 由(3－2－13)可知，

$$\delta W_{IB}=\int_B -\vec{a}_B\cdot\delta\vec{r}_B dm \tag{3－3－2}$$

这里 dm 是中心体上的微元质量，$\vec{a}_B$ 是它的加速度，而 $\delta\vec{r}_B$ 则是 dm 的虚位移.

为求加速度 $\vec{a}_B$ 和虚位移 $\delta\vec{r}_B$，先给出微元质量 dm 的位置向量. 由图 3－1 可见

$$\vec{r}_B = \vec{X} + \vec{\rho}_B + \vec{u}_B \tag{3-3-3}$$

这里 $\vec{X}$ 是系统参考点 CM(也是 B 的内铰)到惯性中心的距离向量,在惯性坐标系内定义,$\vec{X}=\underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{X}$;$\vec{\rho}_B$ 是 dm 到连体坐标系 $\underset{\sim}{b}$ 的原点(也是 CM)的变形前距离,$\vec{u}_B$ 是微元质量 dm 的弹性位移,$\vec{\rho}_B$ 和 $\vec{u}_B$ 都在连体坐标系 $\underset{\sim}{b}^T=(b_1,b_2,b_3)$ 内定义,即

$$\vec{\rho}_B = \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{\rho}_B, \quad \vec{u}_B = \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{u}_B.$$

又设中心体的连体坐标系 $\underset{\sim}{b}$ 相对惯性坐标系 $\underset{\sim}{e}$ 有相对转动,其角速度为 $\vec{\omega}=\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{\omega}$,与之对应地有转角(伪坐标)$\varphi$,$\underset{\sim}{\omega}=\dot{\underset{\sim}{\varphi}}$. 再根据附录 B 中的模态展开法将中心体的弹性位移表达为

$$\vec{u}_B = \sum \vec{T}_{Bk}\tau_k = \vec{\underset{\sim}{T}}_B\underset{\sim}{\tau}_B = \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{\tau}_B \tag{3-3-4}$$

这里 $\vec{T}_{Bk}$ 是中心体对应于 ω_k 的第 K 阶模态向量;$\underset{\sim}{T}_B=(\underset{\sim}{T}_{B1},\cdots,\underset{\sim}{T}_{Bk},\cdots,\underset{\sim}{T}_{BN})$ 是由 $\vec{T}_{Bk}=\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_{Bk}$ 的分量 $\underset{\sim}{T}_{Bk}$ 作为子阵组成的行阵. $\underset{\sim}{\tau}_B^T=(\tau_1,\cdots,\tau_k\cdots,\tau_N)$ 是模态坐标向量.

这样,我们对于中心体,可取其广义坐标为 $q_B^T=(\underset{\sim}{X}^T,\underset{\sim}{\varphi}^T,\underset{\sim}{\tau}_B^T)$. 其中 $\underset{\sim}{X}$ 是整个系统(飞行器)的参考点 CM 的位移;φ 是整个系统的角位移,$\underset{\sim}{\tau}_B$ 是中心体的弹性位移的模态坐标.

显然,中心体上的微元质量 dm 的速度向量 $\vec{v}_B$ 为

$$\vec{v}_B = \frac{D\vec{r}_B}{Dt} = \frac{D\vec{X}}{Dt} + \frac{D\vec{\rho}_B}{Dt} + \frac{D\vec{u}_B}{Dt}$$

注意 $\vec{\rho}_B$ 和 $\vec{u}_B$ 是在动坐标系 $\underset{\sim}{b}$ 内的向量,而 $\underset{\sim}{b}$ 坐标系相对于惯性坐标系 $\underset{\sim}{e}$ 有角速度 $\vec{\omega}$. 这样按照在动坐标系内的向量求时间导数的规定可求出微元质量 dm 的速度为

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{X}} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_B + \dot{\vec{u}}_B + \vec{\omega}\times\vec{u}_B \tag{3-3-5}$$

式中

$$\dot{\vec{X}} = \frac{D\vec{X}}{Dt} = \underset{\sim}{e}^T\dot{\underset{\sim}{X}} \tag{3-3-6}$$

$$\dot{\vec{u}}_B = \frac{d\vec{u}}{dt} = \underset{\sim}{b}^T\dot{\underset{\sim}{u}}_B$$

式中 $\frac{D(\cdot)}{Dt}$ 和 $\frac{d(\cdot)}{dt}$ 分别表示量$(\cdot)$在惯性坐标系和连体坐标系内的时间系数. 至于微元质量 dm 的加速度 $\vec{a}_B$ 则可求得为

$$\vec{a}_B = \frac{D\vec{v}_B}{Dt} = \ddot{\vec{X}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho}_B + \ddot{\vec{u}}_B + \{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_B) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{u}_B$$
$$+ 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{u}}_B + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u}_B)\} \tag{3-3-7}$$

上式中各项的物理意义可以解释如下:$\ddot{\vec{X}}$ 是系统的参考点(CM)的加速度,又可称为牵连加速度;$\ddot{\vec{u}}_B$ 是弹性变形的局部加速度;第二项和第五项表示由角加速度 $\dot{\vec{\omega}}$ 引起的线性加速度,例如在平面圆运动中的切向加速度;第四项和第七项表示离心加速度,第六项 $2\vec{\omega}\times\dot{\vec{u}}_B$ 表示柯氏(Coriolius)加速度.

再考虑虚位移 $\delta\vec{r}_B$. 注意按定义,虚位移是由广义坐标 q_B 的变分引起的满足约束条件的无限小位移增量,在这里的约束条件就是诸量需满足(3-3-3)式的向量链,中心体 B 的广义坐标则为

$$q_B^T = (\underset{\sim}{X}^T,\underset{\sim}{\varphi}^T,\underset{\sim}{\tau}_B^T)$$

因此有

$$\delta\vec{r}_B = \delta\vec{X} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{\rho}_B + \delta\vec{u}_B \tag{3-3-8}$$

与(3-3-5)式的速度表达式比较可见，它是将(3-3-5)式中的高阶量$(\vec{\omega}\times\vec{u})$略去，并以广义坐标的变分$\delta\vec{X}$和$\delta\vec{\varphi}$以及$\delta\vec{u}_B$代替广义坐标的导数$\dot{\vec{X}}$和$\vec{\omega}$，$\dot{\vec{u}}$而得.

将(3-3-8)的虚位移$\delta\vec{r}_B$和(3-3-7)式的加速度代入(3-3-2)式中，得中心体的惯性力虚功δW_{IB}为

$$\begin{aligned}\delta W_{IB} = -\int_B \{&\ddot{\vec{X}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_B + \ddot{\vec{u}}_B + [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_B) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{u}_B + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{u}}_B \\ &+ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}_B)]\} \cdot (\delta\vec{X} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{\rho}_B + \delta\vec{u}_B)dm\end{aligned}$$

倘若我们注意附录B中关于向量及其运算的矩阵表达以及附录B中关于$\underset{\sim}{A}_{eb} = \underset{\sim}{e} \cdot \underset{\sim}{b}^T$的定义. 则上式的$\delta W_{IB}$可以用矩阵形式表达为

$$\begin{aligned}\delta W_{IB} = -\int_B &(\underset{\sim}{e}^T\delta\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\delta\underset{\sim}{\varphi} + \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_B\delta\underset{\sim}{\tau}_B)^T \cdot (\underset{\sim}{e}^T\ddot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_B\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B \\ &- \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{b}^T\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\,\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{\tau}_B + 2\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{T}_B\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{\tau}_B)dm\end{aligned}$$

经过一些繁而不难的整理，最后可得

$$\begin{aligned}\delta W_{IB} = &-\delta\underset{\sim}{X}^T(\ddot{\underset{\sim}{X}}\,m_b - \underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{S}}_B\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{A}_{eb}\underset{\sim}{P}_B\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B - \underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{S}}_B\underset{\sim}{\omega} \\ &+ \underset{\sim}{A}_{eb}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\,\underset{\sim}{P}_B\underset{\sim}{\tau}_B + 2\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{P}_B\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{P}_B\underset{\sim}{\tau}_B) \\ &- \delta\underset{\sim}{\varphi}^T(-\tilde{\underset{\sim}{S}}_B^T\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{J}_B\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{H}_B\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{J}_{\omega B}\underset{\sim}{\omega} + \dot{\underset{\sim}{H}}_{\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B + 2\underset{\sim}{H}_{\omega B}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{H}_{\omega\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B) \\ &- \delta\underset{\sim}{\tau}_B^T(\underset{\sim}{P}_B^T\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{H}_B^T\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{I}\,\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{H}_{\omega B}^T\underset{\sim}{\omega} + \dot{\underset{\sim}{F}}_{\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B + 2\underset{\sim}{F}_{\omega B}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{F}_{\omega\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B)\end{aligned} \tag{3-3-9}$$

式中各系数含义集中给于表3-1中. 这里要加以说明的是关于$\underset{\sim}{\varphi}$. 我们定义$\dot{\underset{\sim}{\varphi}} = \underset{\sim}{\omega}$. 我们知道，对于有限转动情况，转角不是一个向量. 只当转角为无穷小量时，才有向量的特点. 所以作为虚位移，取$\delta\vec{\varphi}$为向量是合理的. 因此，一些文献称φ为伪坐标. 也正因此，我们在(3-3-8)式中采用了$\delta\vec{\varphi}$作为广义坐标的变分；而在(3-3-9)的δW_{IB}中，我们采用了$\dot{\underset{\sim}{\omega}}$，而不用$\ddot{\underset{\sim}{\varphi}}$作为广义加速度. 另外再顺便说明，式中$\underset{\sim}{P}_B$和$\underset{\sim}{H}_B$在一些文献中又称为弹性耦合系数. 在第四章讨论模态降阶准则时，它们是一组有用的量.

现在再考虑中心体的虚应变能. 在采用模态坐标表达中心体的弹性位移后，应变能就可用附录B中的(B-27,b)式给出为

$$U_B = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\tau}_B^T\underset{\sim}{\Lambda}_B\underset{\sim}{\tau}_B$$

而由模态坐标$\underset{\sim}{\tau}_B$变分即可得到虚应变能

$$\delta U_B = \delta\underset{\sim}{\tau}_B^T\underset{\sim}{\Lambda}_B\underset{\sim}{\tau}_B \tag{3-3-10}$$

其中$\underset{\sim}{\Lambda}_B = \mathrm{diag}\{\omega_{B1}^2, \omega_{B2}^2, \cdots, \omega_{Bk}^2, \cdots\cdots\}$，$\omega_{Bk}^2$是与中心体的第$k$阶模态对应的频率平方.

下面再讨论第j个附件A_j的虚应变能和惯性力虚功. 第j个附件A_j的惯性力虚功为

$$\delta W_j = -\int_{A_j} \vec{a}_j \cdot \delta \vec{r}_j dm \qquad (3-3-11)$$

其中 dm 是附件 A_j 上的微元质量，$\vec{r}_j$ 是微元质量 dm 变形后距惯性坐标系原点的距离向量. $\vec{a}_j$ 是微元质量 dm 的加速度. 由图 3-1 可见：

$$\vec{r}_j = \vec{X} + \vec{l}_j + \vec{\Delta}_j + \vec{\rho}_j + \vec{u}_j \qquad (3-3-12)$$

这里 $\vec{X} = \underset{\sim}{e}^T \underset{\sim}{X}$ 仍是系统的中心体上的点 CM 到惯性参考系中心的距离，在惯性参考系内定义；$\vec{l}_j$ 是铰链 h_j 在变形前距离 $\underset{\sim}{b}$ 坐标参考系原点 CM 的位置. 注意 $\underset{\sim}{b}$ 参考系原点同时也是根体 B 的内铰，因而 $\vec{l}_j$ 就是前面讨论过的铰间内量. $\vec{\Delta}_j$ 是中心体外铰 h_j 相对 $\underset{\sim}{b}$ 参考系原点 CM（根体 B 内铰）的弹性位移，$\vec{\Delta}_j = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\Delta}_j$；$\vec{\rho}_j$ 是变形前 dm 距附件 A_j 连体坐标系 $\underset{\sim}{a}_j$ 的原点（即 h_j）的距离，$\vec{u}_j$ 是 A_j 附件的微元质量 dm 的弹性变形，$\vec{\rho}_j = \underset{\sim}{a}_j^T \underset{\sim}{\rho}_j$ 和 $\vec{u}_j = \underset{\sim}{a}_j^T \underset{\sim}{u}_j$ 都在附件 A_j 的连体坐标系 $\underset{\sim}{a}_j$ 内定义.

我们还注意附件 A_j，因而它的连体参考系 $\underset{\sim}{a}_j^T = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3})$，相对于中心体 B 有相对角速度 $\vec{\Omega}_j = a_j^T \Omega_j$. 这样附件 A_j 相对于惯性参考系的角速度 $\vec{\omega}_j$ 就是

$$\vec{\omega}_j = \vec{\omega} + \dot{\vec{\beta}}_j + \vec{\Omega}_j \qquad (3-3-13)$$

其中 $\vec{\omega}$ 是中心体 B 相对惯性参考系的角速度，$\vec{\beta}_j$ 是中心体 B 在 h_j 铰处的弹性角位移，它们都在中心体的连体基内定义，即 $\vec{\omega} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\omega}$，$\vec{\beta} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\beta}$. 除去前面已定义的 $\dot{\varphi} = \omega$ 以外，再定义 $\dot{\psi}_j = \Omega_j$. ψ_j 当然也是伪坐标.

注意(3-3-12)式中的 $\vec{\Delta}_j$ 和(3-3-13)中的 $\vec{\beta}_j$ 分别是中心体为弹性时在其外铰 h_j 处弹性线位移和弹性转角，或者说是中心体 B 的弹性位移 $\vec{u}_B$ 在 h_j 处的值. $\vec{u}_B$ 已按模态展开，$\vec{\Delta}_j$ 和 $\vec{\beta}_j$ 也可用 h_j 处的中心体的模态位移阵 $\underset{\sim}{D}_j$ 和模态转角阵 $\underset{\sim}{B}_j$ 表达：

$$\vec{\Delta}_j = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{D}_j \underset{\sim}{\tau}_B \qquad (3-3-14)$$

$$\vec{\beta}_j = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{B}_j \underset{\sim}{\tau}_B \qquad (3-3-15)$$

$\underset{\sim}{D}_j$ 是中心体 B 的模态阵 $\underset{\sim}{T}_B$ 在 h_j 处的值，$\underset{\sim}{B}_j$ 则是中心体 B 在 h_j 处的模态转角阵. $\underset{\sim}{D}_j$ 和 $\underset{\sim}{B}_j$ 都可由中心体 B 的固有模态信息中取得. 请参看后面例题中的说明. $\underset{\sim}{\tau}_B$ 是中心体的模态坐标阵. 至于 $\vec{u}_j$ 是 A_j 附件的弹性位移，可用 A_j 部件的模态阵表达为

$$\vec{u}_j = \vec{\underset{\sim}{T}}_j \underset{\sim}{\tau}_j = \underset{\sim}{a}_j^T \underset{\sim}{T}_j \underset{\sim}{\tau}_j \qquad (3-3-16)$$

这里，$\underset{\sim}{T}_j = (T_{j1}, T_{j2}, \cdots, T_{jm})$ 是 A_j 附件的模态阵，$\underset{\sim}{\tau}_j$ 是对应的模态坐标列阵.

整个系统的广义坐标可取为 $q^T = (q_B^T, q_1^T, \cdots, q_j^T \cdots, q_N^T)$，其中 $q_B^T = (\underset{\sim}{X}^T, \varphi^T, \underset{\sim}{\tau}_B^T)$ 已如前述；$q_j^T = (\psi_j^T, \underset{\sim}{\tau}_j^T)$ 的元素分别是 A_j 附件相对于中心体的转角和 A_j 体的模态坐标阵. 注意与 A_j 附件有关的广义坐标有 q_B 和 q_j.

这样，附件 A_j 上的微元质量的速度向量 $\vec{v}_j$ 和加速度向量 $\vec{a}_j$ 分别是

$$\vec{v}_j = \frac{D\vec{r}_j}{Dt} = \dot{\vec{X}} + \vec{\omega} \times \vec{l}_j + \vec{\omega}_j \times \vec{\rho}_j + \dot{\vec{u}}_j + \dot{\vec{\Delta}}_j + \vec{\omega}_j \times \vec{u}_j + \vec{\omega} \times \vec{\Delta}_j \qquad (3-3-17)$$

$$\vec{a}_j = \frac{D\vec{v}_j}{Dt} = \ddot{\vec{X}} - \vec{l}_j \times \dot{\vec{\omega}} - \vec{\rho}_j \times \ddot{\vec{\omega}}_j + \ddot{\vec{\Delta}}_j + \ddot{\vec{u}}_j + \{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\Delta}_j + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\Delta}}_j + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times (\vec{l}_j + \vec{\Delta}_j) + \dot{\vec{\omega}}_j \times \vec{u}_j + 2\vec{\omega}_j \times \dot{\vec{u}}_j + \dot{\vec{\omega}}_j \times (\vec{\omega}_j \times \vec{u}_j) + \vec{\omega}_j \times (\vec{\omega}_j \times \vec{\rho}_j)\}$$

此外，还有虚位移，它是由(3－3－17)式略去高阶项$(\vec{\omega}_j \times \vec{u}_j)$和$(\vec{\omega} \times \vec{\Delta}_j)$再以 $\delta\vec{X}, \delta\vec{\varphi}, \delta\vec{u}_j$，$\delta\vec{\Delta}_j$ 和 $\delta\vec{\varphi}_j = \delta\vec{\varphi} + \delta\vec{\beta} + \delta\vec{\psi}_j$ 代替 $\dot{\vec{X}}, \dot{\vec{\varphi}} = \vec{\omega}, \dot{\vec{u}}_j$ 和 $\dot{\vec{\Delta}}_j$ 及 $\dot{\vec{\varphi}}_j = \omega_j$ 而得：

$$\delta\vec{r}_j = \delta\vec{X} - \vec{l}_j \times \delta\vec{\varphi} - \vec{\rho}_j \times (\delta\vec{\varphi} + \delta\vec{\beta}_j + \delta\vec{\psi}_j) + \delta\vec{\Delta}_j + \delta\vec{u}_j$$

将(3－3－13)代入 $\vec{a}_j$ 表达式的右端第三项的 $\dot{\vec{\omega}}_j$ 中，则又有

$$\vec{a}_j = \ddot{\vec{X}} - \vec{\rho}_{cj} \times \dot{\vec{\omega}} - \vec{\rho}_j \times \ddot{\vec{\beta}}_j - \vec{\rho}_j \times \dot{\vec{\Omega}}_j + \ddot{\vec{\Delta}}_j + \ddot{\vec{u}}_j + \{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\Delta}_j + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\Delta}}_j + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\Delta}) - \vec{\omega} \times (\vec{l}_j \times \vec{\omega}) + \dot{\vec{\omega}}_j \times \vec{u}_j + 2\vec{\omega}_j \times \dot{\vec{u}}_j + \vec{\omega}_j \times (\vec{\omega}_j \times \vec{u}_j) - \vec{\omega}_j \times (\vec{\rho}_j \times \vec{\omega}_j)\} \qquad (3-3-18)$$

式中 $\vec{\rho}_{cj}$ 是在中心体的连体坐标系内定义的，由 CM 量起的 A_j 上微元质量 dm 的变形前距离，参见图 3－2：

$$\vec{\rho}_{cj} = \vec{l}_j + \vec{\rho}_j = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\rho}_{cj} \qquad (3-3-19)$$

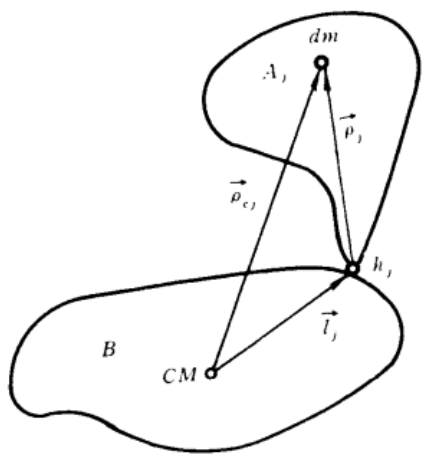


图 3－2　A_j 体上的 $\vec{\rho}_{cj}$

微元质量 dm 的加速度 $\vec{a}_j$ 和虚位移 $\delta\vec{r}_j$ 又可以用矩阵形式写作

$$\vec{a}_j = \underset{\sim}{e}^T \ddot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{b}^T \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{cj} \dot{\underset{\sim}{\omega}} - \underset{\sim}{a}_j^T \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j \dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j - \underset{\sim}{a}_j^T \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j \underset{\sim}{A}_j \underset{\sim}{B}_j \ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{D}_j \ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{a}_j^T \underset{\sim}{T}_j \ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \{\underset{\sim}{a}_j^T \dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j \underset{\sim}{T}_j \underset{\sim}{\tau}_j + 2\underset{\sim}{a}_j^T \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j \underset{\sim}{T}_j \dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{a}_j^T \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j \underset{\sim}{T}_j \underset{\sim}{\tau}_j - \underset{\sim}{a}_j^T \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j \underset{\sim}{\omega}_j + \underset{\sim}{b}^T \dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}} \underset{\sim}{D}_j \underset{\sim}{\tau}_B + 2\underset{\sim}{b}^T \tilde{\underset{\sim}{\omega}} \underset{\sim}{D}_j \dot{\underset{\sim}{\tau}}_B - \underset{\sim}{b}^T \tilde{\underset{\sim}{\omega}} \tilde{\underset{\sim}{l}}_j \underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{b}^T \tilde{\underset{\sim}{\omega}} \tilde{\underset{\sim}{\omega}} \underset{\sim}{D}_j \underset{\sim}{\tau}_B\} \qquad (3-3-20)$$

$$\delta\vec{r}_j = \underset{\sim}{e}^T \delta X - \underset{\sim}{b}^T \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{cj} \delta\varphi - \underset{\sim}{a}_j^T (\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j \underset{\sim}{A}_j \underset{\sim}{B}_j \delta\underset{\sim}{\tau}_B + \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j \delta\underset{\sim}{\psi}_j) + \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{D}_j \delta\underset{\sim}{\tau}_B + \underset{\sim}{a}_j^T \underset{\sim}{T}_j \delta\underset{\sim}{\tau}_j \qquad (3-3-21)$$

将(3-3-20)和(3-3-21)两式代入(3-3-11)式中，整理后，可得关于 A_j 附件的惯性力虚功的矩阵表达式：

$$\begin{aligned}\delta W_j = &-\delta X^T[m_j\ddot{X}-\underset{\sim}{A}_{eb}\underset{\sim}{\tilde{S}}_{cj}\dot{\omega}-\underset{\sim}{A}_{ej}\underset{\sim}{\tilde{S}}_j\dot{\Omega}_j+\underset{\sim}{A}_{eb}(m_j\underset{\sim}{D}_j-\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{\tilde{S}}_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j)\ddot{\tau}_B\\
&+\underset{\sim}{A}_{ej}\underset{\sim}{P}_j\ddot{\tau}_j+\{\underset{\sim}{A}_{ej}(\dot{\tilde{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\tau_j+2\tilde{\omega}_j\underset{\sim}{P}_j\dot{\tau}_j+\tilde{\omega}_j\tilde{\omega}_j\underset{\sim}{P}_j\tau_j-\tilde{\omega}_j\underset{\sim}{\tilde{S}}_j\omega_j)\\
&\underset{\sim}{A}_{eb}(\dot{\tilde{\omega}}\,m_j\underset{\sim}{D}_j\tau_B+2\tilde{\omega}\,m_j\underset{\sim}{D}_j\dot{\tau}_B-\tilde{\omega}\,m_j\tilde{l}_j\omega+\tilde{\omega}\tilde{\omega}\,m_j\underset{\sim}{D}_j\tau_B)\}]\\
&-\delta\varphi^T[-\underset{\sim}{S}_{cj}^T\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{X}+\underset{\sim}{J}_{cj}\dot{\omega}+\underset{\sim}{J}_{bj}\dot{\Omega}_j-(\underset{\sim}{\tilde{S}}_{cj}^T\underset{\sim}{D}_j-\underset{\sim}{J}_{bj}\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{B}_j)\ddot{\tau}_B\\
&+\dot{H}_{cj}\ddot{\tau}_j+\{(\dot{H}_{c\omega j}\tau_j+2H_{e\omega j}\dot{\tau}_j+H_{c\omega\omega j}\tau_j+\underset{\sim}{J}_{c\omega j}\omega_j)+(\underset{\sim}{\tilde{S}}_{cj}^T\dot{\tilde{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j\tau_B\\
&+2\underset{\sim}{\tilde{S}}_{cj}^T\tilde{\omega}\,\underset{\sim}{D}_j\dot{\tau}_B+\underset{\sim}{\tilde{S}}_{cj}^T\tilde{\omega}\,\tilde{l}_j\omega+\underset{\sim}{\tilde{S}}_{cj}^T\tilde{\omega}\tilde{\omega}\,\underset{\sim}{D}_j\tau_B)\}]-\delta\psi_j^T[-\underset{\sim}{\tilde{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{je}\ddot{X}\\
&+\underset{\sim}{J}_{bj}^T\dot{\omega}+\underset{\sim}{J}_j\dot{\Omega}_j-(\underset{\sim}{\tilde{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{D}_j-\underset{\sim}{J}_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j)\ddot{\tau}_B+\dot{H}_j\ddot{\tau}_j+\{(\dot{H}_{\omega j}\tau_j\\
&+2H_{\omega j}\dot{\tau}_j+H_{\omega\omega j}\tau_j+\underset{\sim}{J}_{\omega j}\omega_j)+(\underset{\sim}{\tilde{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\dot{\tilde{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j\tau_B+2\underset{\sim}{\tilde{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\omega}\,\underset{\sim}{D}_j\dot{\tau}_B\\
&+\underset{\sim}{\tilde{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\omega}\,\tilde{l}_j\omega+\underset{\sim}{\tilde{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\omega}\tilde{\omega}\,\underset{\sim}{D}_j\tau_B)\}]-\delta\tau_B^T[(-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{\tilde{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}+\underset{\sim}{D}_j^Tm_j)\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{X}\\
&-(\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{\tilde{S}}_{cj}-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{J}_{bj})\dot{\omega}-(\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{\tilde{S}}_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{J}_j)\dot{\Omega}_j+(\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{D}_j\\
&+\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{J}_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j-\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{\tilde{S}}_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{\tilde{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{D}_j)\ddot{\tau}_B+(\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{P}_j\\
&-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{H}_j)\ddot{\tau}_j+\{(\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\dot{\tilde{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\dot{\underset{\sim}{H}}_{\omega j})\tau_j+(2\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\omega}_j\underset{\sim}{P}_j\\
&-2\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{H}_{\omega j})\dot{\tau}_j-(\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{H}_{\omega\omega j}-\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\omega}_j\tilde{\omega}_j\underset{\sim}{P}_j)\dot{\tau}_j\\
&-(\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\omega}_j\underset{\sim}{\tilde{S}}_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{J}_{\omega j})\omega_j+(\underset{\sim}{D}_j^T\dot{\tilde{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_jm_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{\tilde{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\dot{\tilde{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j)\tau_B\\
&+2(m_j\underset{\sim}{D}_j^T\tilde{\omega}\,\underset{\sim}{D}_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{\tilde{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\omega}\,\underset{\sim}{D}_j)\dot{\tau}_B-(m_j\underset{\sim}{D}_j^T-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{\tilde{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb})(\tilde{\omega}\,\tilde{l}_j\omega\\
&-\tilde{\omega}\tilde{\omega}\,\underset{\sim}{D}_j\tau_B)\}]-\delta\tau_j^T[\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{je}\ddot{X}+\underset{\sim}{H}_{cj}^T\dot{\omega}+\underset{\sim}{H}_j^T\dot{\Omega}_j+(\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{D}_j-\underset{\sim}{H}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j)\ddot{\tau}_B\\
&+\underset{\sim}{I}\ddot{\tau}_j+\{\underset{\sim}{\dot{F}}_{\omega j}\tau_j+2\underset{\sim}{F}_{\omega j}\dot{\tau}_j+\underset{\sim}{F}_{\omega\omega j}\tau_j+\underset{\sim}{H}_{\omega j}^T\omega_j+\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\dot{\tilde{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j\tau_B\\
&+2\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\omega}\,\underset{\sim}{D}_j\dot{\tau}_B+\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\omega}\,\tilde{l}_j\omega+\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\omega}\tilde{\omega}\,\underset{\sim}{D}_j\tau_B\}]\end{aligned}\tag{3-3-22}$$

另外，在采用模态坐标后，根据附录 B 的(B-27，b)式，A_j 附件的虚应变能可以表示为

$$\delta U_j=\delta\tau_j^T\Lambda_j\tau_j$$

这里 τ_j 是 A_j 附件的模态坐标列阵，Λ_j 是对角阵，其主元为 A_j 附件的固有频率平方. 又如果 A_j 附件与中心体 B 间的关节有弹性，其弹簧系数是 K_j，这样在 δU_j 中还要增加有关的虚应变能 $\delta\psi_j^TK_j\psi_j$，即

$$\delta U_j=\delta\tau_j^T\Lambda_j\tau_j+\delta\psi_j^TK_j\psi_j\tag{3-3-23}$$

分别将 δW_{IB}，δW_j，δU_B 和 δU_j 代入(3-3-1，a)和(3-3-1，b)中，可求得系统的惯性力虚功 δW_I 和虚应变能 δU. 至于系统的主动力虚功 δW_e 与主动力的形式与分布有关，我们只给出最后型式

$$\delta W_e=\delta q^TQ$$

其中 Q 是广义主动力列阵.

这样将系统的惯性力虚功 δW_I，外力虚功 δW_e 和虚应变能 δU 全部代入(3-2-16)的虚功原理方程后，其最后结果可以用矩阵形式给出为

$$\delta q^T\{(M\dot{Y}+Kq)-Q+Q_N\}=0 \tag{3-3-24}$$

式中

$$Y=\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{\omega}\\ \dot{\tau}_B\\ \ddot{\Omega}_1\\ \dot{\tau}_1\\ \cdots\\ \vdots\\ \cdots\\ \dot{\Omega}_j\\ \dot{\tau}_j\\ \cdots\\ \vdots\\ \cdots\\ \dot{\Omega}_N\\ \dot{\tau}_N\end{bmatrix},\quad q=\begin{bmatrix}X\\ \varphi\\ \tau_B\\ \ddot{\psi}_1\\ \tau_1\\ \cdots\\ \vdots\\ \cdots\\ \psi_j\\ \tau_j\\ \cdots\\ \vdots\\ \cdots\\ \psi_N\\ \tau_N\end{bmatrix},\quad \text{和 } Q=\begin{bmatrix}Q_x\\ Q_\varphi\\ Q_{\tau B}\\ \cdots\\ Q_{\psi 1}\\ Q_{\tau 1}\\ \cdots\\ \vdots\\ \cdots\\ Q_{\psi j}\\ Q_{\tau j}\\ \cdots\\ \vdots\\ \cdots\\ Q_{\psi N}\\ Q_{\tau N}\end{bmatrix} \tag{3-3-25}$$

$$M=\begin{bmatrix}
m_v I & -A_{eb}\tilde{S}_v & A_{eb}P_B^* & -A_{e1}\tilde{S}_1 & A_{e1}P_1 & \cdots\cdots & -A_{ej}\tilde{S}_j & A_{ej}P_j & \cdots\cdots & -A_{eN}\tilde{S}_N & -A_{eN}P_N\\
-\tilde{S}_v A_{bv} & J_v & H_B^* & J_{b1} & H_{c1} & & J_{bj} & H_{cj} & \cdots\cdots & J_{bN} & H_{cN}\\
 & & I+\sum_{j=1}^{N}W_j & G_1 & G_1^* & \cdots\cdots & G_j & G_j^* & & G_N & G_N^*\\
 & & & J_1 & H_1 & & & & & & \\
 & & & H_1^T & I & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & (下半对称) & & & & J_j & H_j & & & \\
 & & & & & & H_j^T & I & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & J_N & H_N\\
 & & & & & & & & & H_N^T & I
\end{bmatrix} \tag{3-3-26}$$

$$
Q_N=\begin{bmatrix} Q_{XN} \\ Q_{\varphi N} \\ Q_{\tau BN} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_{\theta jN} \\ Q_{\tau jN} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{eb}(-\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{S}}_B\underset{\sim}{\omega}+\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\underset{\sim}{P}_B\underset{\sim}{\tau}_B+2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{P}_B\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B+\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{P}_B\underset{\sim}{\tau}_B)+\sum_{j=1}^{N}\{\underset{\sim}{A}_{ej}(\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j+2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j \\ \quad+\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j-\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{S}}_j\underset{\sim}{\omega}_j)+\underset{\sim}{A}_{eb}m_j(\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B+2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B-\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega}+\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B)\} \\ \underset{\sim}{J}_{\omega B}\dot{\underset{\sim}{\omega}}+\dot{\underset{\sim}{H}}_{\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B+2\underset{\sim}{H}_{\omega B}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B+\underset{\sim}{H}_{\omega\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B+\sum_{j=1}^{N}\{\dot{\underset{\sim}{H}}_{c\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j+2\underset{\sim}{H}_{c\omega j}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j+\underset{\sim}{H}_{c\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j \\ \quad+\underset{\sim}{J}_{c\omega j}\dot{\underset{\sim}{\omega}}_j+\underset{\sim}{S}_{cj}^T\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B+2\tilde{\underset{\sim}{S}}_{cj}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B+\tilde{\underset{\sim}{S}}_{cj}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega}+\tilde{\underset{\sim}{S}}_{cj}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B\} \\ \underset{\sim}{H}_{\omega B}^T\dot{\underset{\sim}{\omega}}+\dot{\underset{\sim}{F}}_{\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B+2\underset{\sim}{F}_{\omega B}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B+\underset{\sim}{F}_{\omega\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B+\sum_{j=1}^{N}\{(\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{P}_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\dot{\underset{\sim}{H}}_{\omega j})\underset{\sim}{\tau}_j \\ \quad+2(\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{H}_{\omega j})\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j+(\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{H}_{\omega\omega j})\underset{\sim}{\tau}_j \\ \quad-(\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{S}}_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{J}_{\omega j})\underset{\sim}{\omega}_j+(m_j\underset{\sim}{D}_j^T\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\underset{\sim}{D}_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\dot{\underset{\sim}{\omega}})\underset{\sim}{\tau}_B+(m_j\underset{\sim}{D}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{D}_j \\ \quad-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{D}_j)\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B-(m_j\underset{\sim}{D}_j^T-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj})(\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega}-\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B)\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{\underset{\sim}{H}}_{\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j+2\underset{\sim}{H}_{\omega j}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j+\underset{\sim}{H}_{\omega\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j+\underset{\sim}{J}_{\omega j}\underset{\sim}{\omega}_j+\underset{\sim}{S}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B+2\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B \\ \quad+\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega}+\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B \\ \dot{\underset{\sim}{F}}_{\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j+2\underset{\sim}{F}_{\omega j}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j+\underset{\sim}{F}_{\omega\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j+\underset{\sim}{H}_{\omega j}^T\underset{\sim}{\omega}_j+\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B+2\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B \\ \quad+\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega}+\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \tag{3-3-27}
$$

$\underset{\sim}{Y}$，q和$\underset{\sim}{Q}$分别是广义速度，广义位移和广义主动力矩阵；广义质量（惯性）矩阵$\underset{\sim}{M}$由(3-3-26)给出.$\underset{\sim}{Q}_N$是有关的非线性项，由(3-3-27)给出.广义刚度矩阵$\underset{\sim}{K}$则为

$$
\underset{\sim}{K}=\mathrm{diag}\{\underset{\sim}{0},\underset{\sim}{0},\underset{\sim}{\Lambda}_B,\underset{\sim}{K}_1,\underset{\sim}{\Lambda}_1,\cdots\cdots\underset{\sim}{K}_j,\underset{\sim}{\Lambda}_j\cdots\cdots\underset{\sim}{K}_N,\underset{\sim}{\Lambda}_N\} \tag{3-3-28}
$$

由于δq是独立的、任意的变分，因此，(3-3-24)式恒为零的条件是它的大括号内项{……}恒为零，由此得出

$$
\underset{\sim}{M}\dot{\underset{\sim}{Y}}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{q}=\underset{\sim}{Q}-\underset{\sim}{Q}_N \tag{3-3-29}
$$

这就是我们推导的多柔体簇系统动力学方程.

现在我们再对这个方程做几点讨论.

1. 在推导这个方程时，除去铰关节无碰撞、无摩擦和弹性位移是小位移[因而有(3-3-10)和(3-3-23)形式的应变能]之外，我们未做任何假设.这个方程是非线性的，我们把这些非线性项放到$\underset{\sim}{Q}_N$中.事实上，(3-3-29)式中各系数阵，只有刚度矩阵$\underset{\sim}{K}$是定常的常值矩阵.惯性矩阵$\underset{\sim}{M}$则是广义坐标的函数，因为$\underset{\sim}{M}$中包括有转换矩阵$\underset{\sim}{A}_{ej}$，$\underset{\sim}{A}_{eb}$，$\underset{\sim}{A}_{bj}$

等，它们与附件 A_j 相对于中心体的转角 $\underset{\sim}{\psi}_j$ 和中心体相对于惯性参考系的转角 φ 有关.

2. 在(3－3－26)中，我们可将 M 阵分割为(3×3)矩阵，即

$$\underset{\sim}{M}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{M}_{11} & \underset{\sim}{M}_{12} & \underset{\sim}{M}_{13}\\ \underset{\sim}{M}_{21} & \underset{\sim}{M}_{22} & \underset{\sim}{M}_{23}\\ \underset{\sim}{M}_{31} & \underset{\sim}{M}_{23} & \underset{\sim}{M}_{33}\end{bmatrix}$$

若除去 $\underset{\sim}{M}_{11}$ 外，令其余 $\underset{\sim}{M}_{ij}$ 皆为零，则有

$$\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{M}_{11}=\begin{bmatrix} m_v\underset{\sim}{I} & -\underset{\sim}{A}_{eb}\underset{\sim}{S}_v\\ -\underset{\sim}{S}_v^T\underset{\sim}{A}_{be} & \underset{\sim}{J}_v\end{bmatrix}$$

对应的广义坐标 $q_B^T=(X^T,\varphi^T)$ 是整个系统(例如飞行器)的质心的位移和转角. 显然此时

$$\underset{\sim}{M}_{11}\dot{\underset{\sim}{Y}}_B-\underset{\sim}{Q}_B+\underset{\sim}{Q}_{BN}=0 \qquad (3-3-30)$$

式中 $\dot{Y}_B^T=(\dot{X}^T,\omega^T)$，$Q_B^T=(Q_X^T,Q_\varphi^T)$，$Q_{BN}^T=(Q_{XN}^T,Q_{\varphi N}^T)$(只含 ω 项). 这就相当于我们把飞行器(整个系统)当作一个结构来看(此时各附件与中心体间相对夹角 ψ_j 为固定，因而 $\ddot{\underset{\sim}{\psi}}_j=\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j=\underset{\sim}{0}$)，并且不考虑系统的弹性位移情况. 也就是说(3－3－30)式是整个系统被作为刚体来考虑时的动力学方程，这也就是我们熟悉的刚体动力学方程.

子阵 $\underset{\sim}{M}_{12}$，表示了中心体的弹性位移的模态坐标 τ_B 对系统的整体运动的影响. 式中

$$\underset{\sim}{P}_B^*=\underset{\sim}{P}_B+\sum_j(m_j\underset{\sim}{D}_j-\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j)$$

$$\underset{\sim}{H}_B^*=\underset{\sim}{H}_B+\sum_j(\underset{\sim}{S}_{cj}^T\underset{\sim}{D}_j-\underset{\sim}{J}_{bj}\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j)$$

两式中的 $\sum_j(\cdots\cdots)$ 内项分别表示了“挂在”中心体上的附件经过中心体的弹性振动($\underset{\sim}{D}_j$ 和 $\underset{\sim}{B}_j$)而产生的惯性力和惯性力矩的系数. $\underset{\sim}{M}_{13}$ 是各附件对系统运动的影响(例如对飞行器的质心运动的影响). 在第二章 § 4 中我们曾讨论过 $\underset{\sim}{P}_j\ddot{\underset{\sim}{\xi}}_j$ 表示弹性位移惯性力的合力、

表 3－1

$m_B=\int_B dm$	中心体的质量，
$m_j=\int_j dm$	A_j 附件的质量，
$m_v=m_B+\sum_{j=1}^N m_j$	整个系统(如飞行器)的质量，
$\underset{\sim}{J}_B=\int_B\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\,dm$	无弹性变形时中心体的相对参考点 CM 的惯性张量.
$\underset{\sim}{J}_j=\int_j\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j\,dm$	无弹性变形时附件 A_j 相对其内铰 h_j 的惯性张量，
$\underset{\sim}{J}_{cj}=\int_j\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{cj}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{cj}\,dm=[\tilde{\underset{\sim}{l}}_j^T\tilde{\underset{\sim}{l}}_jm_j+\tilde{\underset{\sim}{l}}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb}+(\tilde{\underset{\sim}{l}}_j^T\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{jb})^T+\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{J}_j\underset{\sim}{A}_{jb}]$	无弹性变形时 A_j 附件相对于参考点 CM 的惯性张量
$\underset{\sim}{J}_v=\underset{\sim}{J}_B+\sum_{j=1}^N\underset{\sim}{J}_{cj}$	无弹性变形时系统(飞行器)相对于 CM 的惯性张量
$\tilde{\underset{\sim}{S}}_j=\int_j\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j\,dm$	无弹性变形时 A_j 附件对其内铰 h_j 的静矩 $\underset{\sim}{S}_j$ 的斜方阵，
$\tilde{\underset{\sim}{S}}_B=\int_B\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\,dm$	无弹性变形时中心体对其参考点 CM 的静矩 $\underset{\sim}{S}_B$ 的斜方阵，

续表 3－1

$\underline{\tilde{S}}_{cj}=\int\underline{\tilde{\rho}}_{cj}\,dm=\underline{\tilde{l}}_j m_j+\underline{A}_{bj}\underline{\tilde{S}}_j\underline{A}_{jb}$	无弹性变形时附件 A_j 相对于 CM 的静矩 $\underline{S}_{cj}$ 的斜方阵，
$\underline{\tilde{S}}_v=\underline{\tilde{S}}_B+\sum_{j=1}^{N}\underline{\tilde{S}}_{cj}$	无弹性变形时系统（飞行器）相对 CM 的静矩 $\underline{S}_v$ 的斜方阵.
$\underline{J}_{bj}=\int_j\underline{\tilde{\rho}}_{cj}^T\underline{A}_{bj}\underline{\tilde{\rho}}_j\,dm=\underline{\tilde{l}}_j^T\underline{A}_{bj}\underline{\tilde{S}}_j+\underline{A}_{bj}\underline{J}_j$	A_j 附件相对于 CM 的交叉惯矩.
$\underline{P}_B=\int_B\underline{T}_B\,dm$	中心体的模态动量系数，
$\underline{P}_j=\int_j\underline{T}_j\,dm$	A_j 附件的模态动量系数，
$\underline{H}_B=\int_B\underline{\tilde{\rho}}_B\underline{T}_B\,dm$	中心体相对于 CM 的模态角动量系数，
$\underline{H}_j=\int_j\underline{\tilde{\rho}}_j\underline{T}_j\,dm$	A_j 附件相对于其内铰 h_j 的模态角动量系数，
$\underline{J}_{\omega B}=\int_B\underline{\tilde{\rho}}_B^T\underline{\tilde{\omega}}\,\underline{\tilde{\rho}}_B\,dm=\underline{\tilde{\omega}}\,\underline{J}_B$，	$\underline{J}_{\omega j}=\int_j\underline{\tilde{\rho}}_j^T\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{\tilde{\rho}}_j dm=\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{J}_j$，
$\underline{H}_{\omega B}=\int_B\underline{\tilde{\rho}}_B\underline{\tilde{\omega}}\,\underline{T}_B dm$，	$\underline{H}_{\omega j}=\int_j\underline{\tilde{\rho}}_j\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{T}_j dm$，
$\dot{\underline{H}}_{\omega B}=\int_B\underline{\tilde{\rho}}_B\dot{\underline{\tilde{\omega}}}\,\underline{T}_B dm$，	$\dot{\underline{H}}_{\omega j}=\int_j\underline{\tilde{\rho}}_j\dot{\underline{\tilde{\omega}}}_j\underline{T}_j dm$，
$\underline{H}_{\omega\omega B}=\int_B\underline{\tilde{\rho}}_B^T\underline{\tilde{\omega}}\,\underline{\tilde{\omega}}\,\underline{T}_B dm$，	$\underline{H}_{\omega\omega j}=\int_j\underline{\tilde{\rho}}_j^T\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{T}_j dm$，
$\underline{F}_{\omega B}=\int_B\underline{T}_B^T\underline{\tilde{\omega}}\,\underline{T}_B dm$，	$\underline{F}_{\omega j}=\int_j\underline{T}_j^T\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{T}_j dm$
$\underline{F}_{\omega\omega B}=\int_B\underline{T}_B^T\underline{\tilde{\omega}}\,\underline{\tilde{\omega}}\,\underline{T}_B dm$，	$\underline{F}_{\omega\omega j}=\int_j\underline{T}_j^T\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{T}_j dm$
$\underline{I}=\int_B\underline{T}_B^T\underline{T}_B dm$，	$\underline{I}=\int_j\underline{T}_j^T\underline{T}_j dm$
$\underline{H}_{cj}=\int_j\underline{\tilde{\rho}}_{cj}\underline{A}_{bj}\underline{T}_j dm$	A_j 附件相对于 CM 的模态角动量系数
$\underline{H}_{c\omega j}=\int\underline{\tilde{\rho}}_{cj}\underline{A}_{bj}\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{T}_j dm$	
$\dot{\underline{H}}_{c\omega j}=\int\underline{\tilde{\rho}}_{cj}\underline{A}_{bj}\dot{\underline{\tilde{\omega}}}_j\underline{T}_j dm$	
$\underline{H}_{c\omega\omega j}=\int\underline{\tilde{\rho}}_{cj}\underline{A}_{bj}\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{T}_j dm$	
$\underline{J}_{c\omega j}=\int\underline{\tilde{\rho}}_{cj}^T\underline{A}_{bj}\underline{\tilde{\omega}}_j\underline{\tilde{\rho}}_j dm$	
$\underline{P}_{\beta}=\underline{P}_B+\sum_{j=1}^{N}(m_j\underline{D}_j-\underline{A}_{bj}\underline{\tilde{S}}_j\underline{A}_{jb}\underline{B}_j)$	
$\underline{H}_B^*=\underline{H}_B-\sum_{j=1}^{N}(\underline{\tilde{S}}_{cj}^T\underline{D}_j-\underline{J}_{bj}\underline{A}_{jb}\underline{B}_j)$	
$\underline{G}_j=-(\underline{D}_j^T\underline{A}_{bj}\underline{\tilde{S}}_j-\underline{B}_j^T\underline{A}_{bj}\underline{J}_j)$	
$\underline{G}_j^*=\underline{D}_j^T\underline{A}_{bj}\underline{P}_j-\underline{B}_j^T\underline{A}_{bj}\underline{H}_j$	
$\underline{W}_j=\underline{D}_j^T\underline{D}_j+\underline{B}_j^T\underline{A}_{bj}\underline{J}_j\underline{A}_{jb}\underline{B}_j-\underline{D}_j^T\underline{A}_{bj}\underline{\tilde{S}}_j\underline{A}_{jb}\underline{B}_j-\underline{B}_j^T\underline{A}_{bj}\underline{\tilde{S}}_j^T\underline{A}_{jb}\underline{D}_j$	

而 $\underline{H}_j\ddot{\underline{r}}_j$ 表示弹性位移惯性力的合力矩；它们分别对整个系统的参考点 CM 的位移 $\underline{X}$ 和转

角 $\underset{\sim}{\varphi}$产生影响.

3. 第二行的各子阵 $\underset{\sim}{M}_{2j}$和第二列的各子阵 $\underset{\sim}{M}_{j2}(j=1,2,3)$反映中心体的弹性变形的影响. 当中心体是刚体时，在广义坐标 $\underset{\sim}{q}$中将不含 $\underset{\sim}{r}_B$，相应地在 $\underset{\sim}{M}$阵中应划掉 $\underset{\sim}{M}_{2j}$和 $\underset{\sim}{M}_{j2}$. 在目前大部分实例中，中心体总远比其他附件有较大的刚性，因此，假设中心体是刚体，可以使模型大为简化.

4. (3－3－29)式的方程是非线性的. 这种动力学模型既很难做控制系统设计用的模型，在求响应时也增加计算上的困难. 因此要使之线性化. 在航天器应用中的一个很常用的线性化方法是假设附件相对于中心体的转动角速度 Ω_j 以及整个系统的转动角速度 $\underset{\sim}{\omega}$ 都是与弹性位移同阶的小量. 这个假设对于相当一部分飞行器是合理的. 例如一个三轴稳定的卫星，其太阳帆板要保持以最大面积向着太阳，当卫星绕地球旋转一圈时，太阳帆板也需相对卫星旋转 2π 角度. 这样相应的相对角速度 Ω_j 不是很大. 另外飞行器如果不做急骤的机动动作时，它的 $\underset{\sim}{\omega}$也不会很大. 采用这个慢转动假设后，就可设 $\vec{\omega}\times\vec{u}$ 和$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})$是高阶小量，可以略去. 这些项就是(3－3－7)和(3－3－18)的加速度表达式中在大括号{…}内的项. 正是这些项在惯性力虚功中引起了复杂的非线性项，这些非线性项都给出在 $\underset{\sim}{Q}_N$ 中. 略去这些项后，可得到一个线性化的方程：

$$\underset{\sim}{M}\ddot{q}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{q}=\underset{\sim}{Q}$$

解这个方程当然容易得多了.

不过这个方程还只在形式上是线性化的，因为 $\underset{\sim}{M}$中含有转换矩阵，它是 $\underset{\sim}{q}$的函数，但在缓慢转动假设下，$\underset{\sim}{M}$相对于某些个特定时刻的构形的值的变化也将是缓慢的，因此可以相对某些个特定时刻的构形作线性化来求解. 这种解法又称为冻结系数法.

倘若考虑的卫星是自旋稳定的卫星，情况当然又有不同. 不过自旋在大部分情况下是绕一个轴进行的，而且转速是指定的，这样在解题时可以方便一些.

在本节的最后我们来考虑图 3－3 的两个平面梁所组成的最简单的多柔体簇系统. 通过这个例子我们介绍一些矩阵的意义和求法.

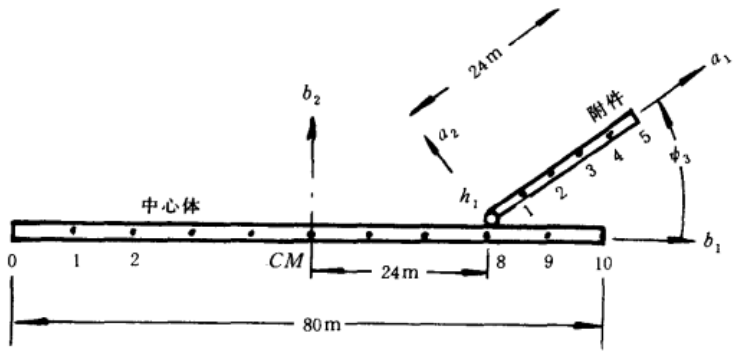


图 3－3　由两个似梁结构组成的多柔体簇系统

我们规定附件的连体坐标参考系 $\underset{\sim}{a}^T=(a_1,a_2,a_3)$的 a_3 轴和中心体 B 的连体坐标系 $\underset{\sim}{b}^T=(b_1,b_2,b_3)$的 b_3 轴都垂直于纸面. 两梁分别只有沿 a_2 及 b_2 方向的位移. 中心体共分为 10 段，附件则分为 5 段. 我们已求得各梁的节点处的模态(见图 3－4，3－5). 中心体的模

态 $\underset{\sim}{T}_B$ 和其模态转角阵 $\underset{\sim}{B}_B$ 分别在(3-3-31)和(3-3-32)中给出.

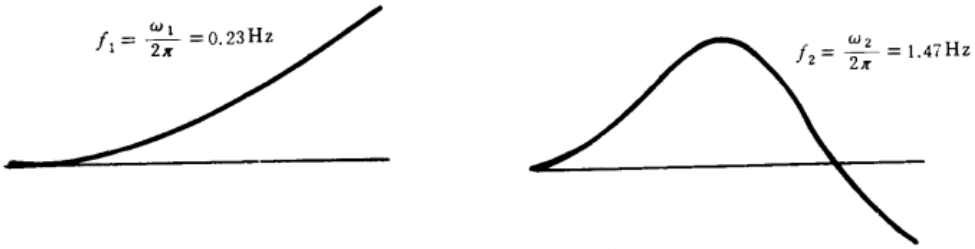


图 3-4 附件的模态

$$\underset{\sim}{T}_B=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -0.8 & -0.189 & -0.456 & -0.77 & -1.23\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -0.6 & -0.614 & -1.208 & -1.508 & -1.3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -0.4 & -1.08 & -1.502 & -0.869 & 0.422\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -0.2 & -1.415 & -1.4 & 0.63 & 1.397\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & -1.504 & -0.02 & 1.414 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0.2 & -1.312 & 1 & 0.642 & -1.397\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0.4 & -0.853 & 1.414 & -0.832 & -0.437\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0.6 & -0.225 & 1 & -1.397 & 1.26\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0.8 & 0.444 & 0 & -0.427 & 0.831\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1.0 & 1.012 & -1 & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \tag{3-3-31}$$

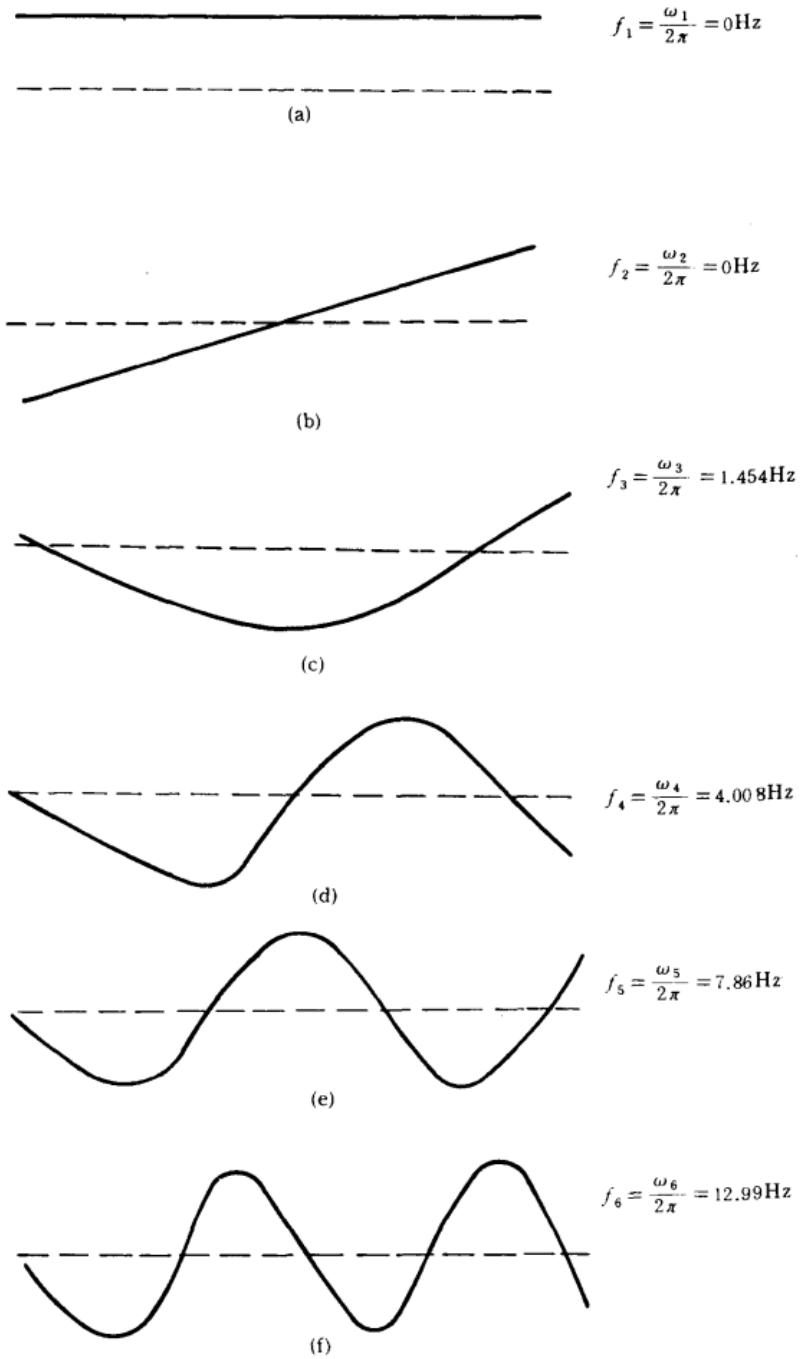

$f_1=\frac{\omega_1}{2\pi}=0\text{Hz}$
(a)
$f_2=\frac{\omega_2}{2\pi}=0\text{Hz}$
(b)
$f_3=\frac{\omega_3}{2\pi}=1.454\text{Hz}$
(c)
$f_4=\frac{\omega_4}{2\pi}=4.008\text{Hz}$
(d)
$f_5=\frac{\omega_5}{2\pi}=7.86\text{Hz}$
(e)
$f_6=\frac{\omega_6}{2\pi}=12.99\text{Hz}$
(f)

图 3-5　中心体的模态

$$\underset{\sim}{B}_B = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.025 & -0.02 & -0.06 & -0.09 & -0.15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.025 & -0.05 & -0.09 & -0.09 & -0.01 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.025 & -0.06 & -0.04 & 0.08 & 0.215 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.025 & -0.04 & 0.01 & 0.187 & 0.122 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.025 & -0.01 & 0.173 & 0.1 & -0.175 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.025 & 0.02 & 0.137 & -0.06 & -0.175 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.025 & 0.06 & 0.05 & -0.184 & -0.175 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.025 & -0.05 & -0.05 & -0.07 & 0.119 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.025 & 0.08 & -0.125 & 0.121 & -0.05 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.025 & 0.07 & -0.125 & 0.178 & -0.228
\end{bmatrix} \quad (3-3-32)$$

它们都是按节点顺序排列的，每个节点上有三个位移分量. 按这里的假设，节点模态只是第 2 个元素有值，它是梁的模态向量在 a_2（或 b_2）方向的分量. 对于中心体，只考虑六阶模态，所以 $\underset{\sim}{T}_B$ 和 $\underset{\sim}{B}_B$ 都只有六列. 中心体的模态转角阵的每个节点上也有三个值，因为转角也是向量，在本例中只有绕 b_3 的转角，所以在每个节点上只有第三个元素有值. 中心体前两阶是刚体模态，其中第一阶是平移模态，只有沿 b_2 方向的位移，没有转角（因此，$\underset{\sim}{T}_B$ 第一列模态辐值全为 1，而 $\underset{\sim}{B}_B$ 的第一列全是零）. 对于第二阶模态，只有绕 b_3 的转角，所以 $\underset{\sim}{B}_B$ 矩阵中每个节点的第三个值有相同值；同时每个节点在沿 b_2 方向有和距离成比例的线位移，即在 $\underset{\sim}{T}_B$ 的第二列的每个节点上的第二个元素有相应的值. 给在(3 - 3 - 33)的是附件模态阵 $\underset{\sim}{T}_a$，只考虑两阶模态，所以 $\underset{\sim}{T}_a$ 阵只有两列.

$$\underset{\sim}{T}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.12 & -0.067 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.46 & -0.407 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.93 & -1.327 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1.43 & -0.26 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2.0 & 0.98 \end{bmatrix} \tag{3-3-33}$$

表示 h_1 铰处的中心体弹性位移和转角的系数阵 $\underset{\sim}{D}_1$ 和 $\underset{\sim}{B}_1$ 是由 $\underset{\sim}{T}_B$ 和 $\underset{\sim}{B}_B$ 中得出的. 注意 h_1 铰放在中心体的第 8 节点处，因此 $\underset{\sim}{D}_1$ 就是 $\underset{\sim}{T}_B$ 阵在第 8 节点处子阵，$\underset{\sim}{B}_1$ 就是 $\underset{\sim}{B}_B$ 在第 8 节点上的子阵. $\underset{\sim}{D}_1$ 给在(3-3-34)，$\underset{\sim}{B}_1$ 给在(3-3-35)

$$\underset{\sim}{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.6 & -0.225 & 1 & -1.397 & 1.26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-3-34}$$

$$\underset{\sim}{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.025 & -0.05 & -0.05 & -0.07 & 0.119 \end{bmatrix} \tag{3-3-35}$$

再看 h_1 铰的铰间向量 $\vec{l}_1 = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{l}_1$. 由图(3-3)可见，$\underset{\sim}{l}_1^T = (24, 0, 0)$.

再考虑中心体的模态动量系数 $\underset{\sim}{P}_B$ 的计算. 在 3-1 表中给出

$$\underset{\sim}{P}_B = \int_B \underset{\sim}{T}_B dm$$

在本例中，如果已知中心体的单位长度质量是 γ，则 $dm = \gamma dx$，x 是沿 b_1 量取的坐标. 上式中的 $\underset{\sim}{T}_B$ 事实上是 $\underset{\sim}{T}_B(x)$，即积分变量 x 的函数. 但在本例中，$\underset{\sim}{T}_B$ 是用离散形式给出的，即给出了不同 x 值处(不同节点处)的模态值，见式(3-3-31)，这样上式可以用梯形积分法，即令

$$\underset{\sim}{P}_B = \sum \frac{1}{2}(\underset{\sim}{T}_B^k + \underset{\sim}{T}_B^{k-1})\gamma \Delta x$$

这里 T_B^k 是 T_B 中第 k 节点的子阵，Δx 是 k 节点与$(k-1)$节点间距离. 其他一些需作积分

运算的矩阵也仿此处理.

§4. 用 Lagrange 第二方程推导多柔体簇系统的动力学方程

Lagrange 第二方程是分析力学的重要方程之一，用它可成功地推导多体系统动力学方程.

Lagrange 第二方程写作

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q_k \tag{3-4-1}$$

其中 q_k 是广义坐标，Q_k 是与广义坐标 q_k 对应的广义主动力，L 是 Lagrange 函数，定义为

$$L=T-U \tag{3-4-2}$$

T 和 U 分别是系统的动能和应变能(弹性位能).

对于多柔体簇系统，它的动能和应变能分别为中心体的动能和应变能与各弹性附件的动能和应变能之和. 以下为了简化推导，我们假设中心体是刚体. 这样系统的应变能只是各弹性附件的应变能之和. 如果关节 h_j 转角为 ψ_j，而关节也有弹性，其弹簧系数记作 K_j，这时系统应变能中还应包括这部分能量. 这样

$$U=\sum_{j=1}^{N}\left(U_j+\frac{1}{2}\underset{\sim}{\psi}_j^T\underset{\sim}{K}_j\underset{\sim}{\psi}_j\right) \tag{3-4-3}$$

式中 N 是附件总数，U_j 是 A_j 弹性附件的应变能，在以附件模态阵表达 A_j 的弹性位移后，应变能 U_j 可写作

$$U_j=\frac{1}{2}\underset{\sim}{r}_j^T\underset{\sim}{\Lambda}_j\underset{\sim}{r}_j \tag{3-4-4}$$

其中 $\underset{\sim}{r}_j$ 是 A_j 附件的模态坐标，$\underset{\sim}{\Lambda}_j$ 是以 A_j 的固有频率平方为主元的对角阵. 参见附录 B 的(B-27).

下面我们着重讨论系统的动能. 它由中心体的动能 T_B 和典型弹性附件的动能 T_j 之和组成.

先考虑中心体. 其动能表达式应为

$$T_B=\frac{1}{2}\int_B \vec{v}_B\cdot\vec{v}_B dm \tag{3-4-5}$$

式中 $\vec{v}_B$ 是中心体上微元素质量 dm 的速度向量. 由上一节的(3-3-5)式可知，当中心体为刚体时($\vec{u}_B=0$)，

$$\vec{v}_B=\dot{\vec{X}}-\vec{\rho}_B\times\vec{\omega}=\underset{\sim}{e}^T\dot{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\underset{\sim}{\omega} \tag{3-4-6}$$

将(3-4-6)代入(3-4-5)，整理后可得

$$\begin{aligned}T_B&=\frac{1}{2}\int_B(\dot{\underset{\sim}{X}}^T\underset{\sim}{e}-\underset{\sim}{\omega}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B^T\underset{\sim}{b})\cdot(\underset{\sim}{e}^T\dot{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\underset{\sim}{\omega})dm\\&=\frac{1}{2}[\dot{\underset{\sim}{X}}^T(m_B\dot{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{A}_{\omega}\tilde{\underset{\sim}{S}}_B\underset{\sim}{\omega})+\underset{\sim}{\omega}^T(-\tilde{\underset{\sim}{S}}_B^T\underset{\sim}{A}_{\omega}^T\dot{\underset{\sim}{X}}+\underset{\sim}{J}_B\underset{\sim}{\omega})]\end{aligned} \tag{3-4-7}$$

再考查第 j 个弹性附件 A_j 的动能

$$T_j=\frac{1}{2}\int\vec{v}_j\cdot\vec{v}_j dm \tag{3-4-8}$$

其中，$\vec{v}_j$ 是微元质量 dm 的速度，由上一节的(3－3－17)式可知

$$\vec{v}_j = \dot{\vec{X}} - \vec{l}_j \times \vec{\omega} - \vec{\rho}_j \times \vec{\omega}_j + \vec{\omega}_j \times \vec{u}_j + \dot{\vec{u}}_j \tag{3-4-9}$$

由于中心体是刚体，所以式中没有 $\dot{\vec{\Delta}}_j$ 及 $\vec{\omega}\times\vec{\Delta}_j$. 又由上一节的(3－3－13)式知附件 A_j 的角速度 $\vec{\omega}_j$ 为(当中心体为刚体时，$\vec{\beta}_j=\dot{\vec{\beta}}_j=0$)：

$$\vec{\omega}_j = \vec{\omega} + \vec{\Omega}_j \tag{3-4-10}$$

其中 $\vec{\Omega}_j=\underset{\sim}{a}_j^T\underset{\sim}{\Omega}_j$ 是弹性附件相对于中心体的相对角速度. $\vec{u}_j$ 是 A_j 附件的微元质量 dm 的弹性位移，按上一节的(3－3－14)式可以用模态坐标表达为

$$\vec{u}_j = \underset{\sim}{a}_j^T\underset{\sim}{T}_j\underset{\sim}{\tau}_j \tag{3-4-11}$$

其中 $\underset{\sim}{T}_j$ 是 A_j 附件的固有模态阵，$\underset{\sim}{\tau}_j$ 是 A_j 附件的模态坐标. 将(3－4－11)和(3－4－10)代入(3－4－9)，则可将 $\vec{v}_j$ 表达为

$$\begin{aligned}\vec{v}_j &= \dot{\vec{X}} - \vec{\rho}_{cj} \times \vec{\omega} - \vec{\rho}_j \times \vec{\Omega} + \dot{\vec{u}}_j + \vec{\omega}_j \times \vec{u}_j \\ &= \underset{\sim}{e}^T\dot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{cj}\underset{\sim}{\omega} - \underset{\sim}{a}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j\underset{\sim}{\Omega} + \underset{\sim}{a}_j^T\underset{\sim}{T}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{a}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{T}_j\underset{\sim}{\tau}_j\end{aligned} \tag{3-4-12}$$

式中的 $\vec{\rho}_{cj}=\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{\rho}_{cj}$，见(3－3－19)式. 将(3－4－12)式代入(3－4－8)式得 A_j 附件的动能为

$$\begin{aligned}T_j = &\frac{1}{2}\int_j [\dot{\underset{\sim}{X}}^T\underset{\sim}{e} - \underset{\sim}{\omega}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{cj}^T\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{\Omega}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j^T\underset{\sim}{a}_j + \dot{\underset{\sim}{\tau}}_j^T\underset{\sim}{T}_j^T\underset{\sim}{a}_j + \underset{\sim}{\tau}_j^T\underset{\sim}{T}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j^T\underset{\sim}{a}_j] \\ &\cdot [\underset{\sim}{e}^T\dot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{cj}\underset{\sim}{\omega} - \underset{\sim}{a}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j\underset{\sim}{\Omega} + \underset{\sim}{a}_j^T\underset{\sim}{T}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{a}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{T}_j\underset{\sim}{\tau}_j]dm \\ = &\frac{1}{2}\{(\dot{\underset{\sim}{X}}^T\dot{\underset{\sim}{X}}\,m_j - \dot{\underset{\sim}{X}}^T\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{S}}_{cj}\underset{\sim}{\omega} - \dot{\underset{\sim}{X}}^T\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j\underset{\sim}{\Omega} + \dot{\underset{\sim}{X}}^T\underset{\sim}{A}_{ej}\underset{\sim}{P}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \dot{\underset{\sim}{X}}^T\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j) \\ &+ \underset{\sim}{\omega}^T(-\tilde{\underset{\sim}{S}}_{cj}^T\underset{\sim}{A}_{be}\dot{\underset{\sim}{X}}^T + \underset{\sim}{J}_{cj}\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{J}_{bj}\underset{\sim}{\Omega} + \underset{\sim}{H}_{cj}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{H}_{c\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j) \\ &+ \underset{\sim}{\Omega}_j^T(-\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^T\underset{\sim}{A}_{je}\dot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{J}_{bj}^T\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{J}_j\underset{\sim}{\Omega} + \underset{\sim}{H}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{H}_{\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j) \\ &+ \dot{\underset{\sim}{\tau}}_j^T(\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{je}\dot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{H}_{cj}^T\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{H}_j^T\underset{\sim}{\Omega} + \underset{\sim}{I}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{F}_{\omega\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j) \\ &+ \underset{\sim}{\tau}_j^T(\underset{\sim}{P}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j^T\underset{\sim}{A}_{je}\dot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{H}_{c\omega j}^T\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{H}_{\omega j}^T\underset{\sim}{\Omega} + \underset{\sim}{F}_{\omega j}^T\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{F}_{\omega\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j)\}\end{aligned} \tag{3-4-13}$$

把 A_j 附件动能 T_j(3－4－13)，中心体动能 T_B(3－4－7)以及弹性附件 A_j 的应变能(3－4－4)和(3－4－3)全部代入 Lagrange 函数(3－4－2)中，有

$$L = \sum_{j=1}^{N} L_j + L_B = \sum_{j=1}^{N}(T_j - U_j - \frac{1}{2}\underset{\sim}{\psi}_j^T\underset{\sim}{K}_j\underset{\sim}{\psi}_j) + T_B \tag{3-4-14}$$

注意

$$\underset{\sim}{\omega} = \dot{\underset{\sim}{\varphi}} \text{ 和 } \underset{\sim}{\Omega}_j = \dot{\underset{\sim}{\psi}}_j \tag{3-4-15}$$

倘若取广义位移为

$$\underset{\sim}{q}^T = (\underset{\sim}{X}^T, \underset{\sim}{\varphi}^T, \underset{\sim}{\psi}_1^T, \underset{\sim}{\tau}_1^T, \cdots, \underset{\sim}{\psi}_k^T, \underset{\sim}{\tau}_k^T \cdots, \underset{\sim}{\psi}_N^T, \underset{\sim}{\tau}_N^T) \tag{3-4-16}$$

这时可见 Lagrange 函数有以下特点：

$$L(q) = \sum_{j=1}^{N} L_j(\underset{\sim}{X}, \dot{\underset{\sim}{\varphi}}, \underset{\sim}{\psi}_j, \underset{\sim}{\tau}_j, \dot{\underset{\sim}{\psi}}_j, \dot{\underset{\sim}{\tau}}_j) + L_B(\dot{\underset{\sim}{X}}, \dot{\underset{\sim}{\varphi}}) \tag{3-4-17}$$

将上式代入(3－4－1)式中，我们着重讨论一下关于 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ 的计算.

先讨论与广义位移的时间导数 $\dot{X}$ 及 $\dot{\varphi}$ 有关的项. 由(3－4－17)可见，无论 L_B 还是 L_j 都与 $\dot{X}$ 及 $\dot{\varphi}=\omega$ 有关. 因此

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\underset{\sim}{X}}}=\frac{\partial T_B}{\partial \dot{\underset{\sim}{X}}}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\underset{\sim}{X}}}$$

和

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{\partial T_B}{\partial \dot{\varphi}}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\varphi}}$$

由(3－4－7)及(3－4－13)可得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\underset{\sim}{X}}}=m_v\dot{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{A}_{eb}\underset{\sim}{\tilde{S}}_v\underset{\sim}{\omega}+\sum_{j=1}^{N}(-\underset{\sim}{A}_{ej}\underset{\sim}{\tilde{S}}_j\underset{\sim}{\Omega}_j+\underset{\sim}{A}_{ej}\underset{\sim}{P}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j+\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\omega}}=-\underset{\sim}{\tilde{S}}_v^T\underset{\sim}{A}_{be}\dot{\underset{\sim}{X}}+\underset{\sim}{J}_v\underset{\sim}{\omega}+\sum_{j=1}^{N}(\underset{\sim}{J}_{bj}\underset{\sim}{\Omega}_j+\underset{\sim}{H}_{cj}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j+\underset{\sim}{H}_{c\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j)$$

由(3－4－17)可知 Lagrange 函数 L 与 $\underset{\sim}{X}$ 和 φ 无关，因而

$$\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{X}}=\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$$

再求 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underset{\sim}{X}}}\right)$ 和 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)$. 注意这里不仅广义坐标及其时间导数是时间的函数. 转换矩阵 A_{eb} 等因为含有广义坐标 φ 或 ψ_j，因而也是时间的函数. 因此

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underset{\sim}{X}}}\right)=&\ m_v\ddot{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{S}}_v\dot{\underset{\sim}{\omega}}+\sum_{j=1}^{N}(-\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j+\underset{\sim}{A}_{ej}\underset{\sim}{P}_j\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j)\\&+\{-\dot{\underset{\sim}{A}}_{eb}\underset{\sim}{\tilde{S}}_v\underset{\sim}{\omega}+\sum_{j=1}^{N}(-\dot{\underset{\sim}{A}}_{ej}\underset{\sim}{\tilde{S}}_j\underset{\sim}{\Omega}_j+\dot{\underset{\sim}{A}}_{ej}\underset{\sim}{P}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j+\dot{\underset{\sim}{A}}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j\\&+\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j+\underset{\sim}{A}_{ej}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j)\}\end{aligned}$$

又由附录 A 的(A－22)式，有

$$\dot{\underset{\sim}{A}}_{eb}=\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}$$

$$\dot{\underset{\sim}{A}}_{ej}=\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j$$

这样，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underset{\sim}{X}}}\right)=&\ m_v\ddot{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{S}}_v\dot{\underset{\sim}{\omega}}+\sum_{j=1}^{N}(-\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j+\underset{\sim}{A}_{ej}\underset{\sim}{P}_j\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j)\\&+\left\{-\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{S}}_v\underset{\sim}{\omega}+\sum_{j=1}^{N}(-\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{\tilde{S}}_j\underset{\sim}{\Omega}_j+2\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j\right.\\&\left.+\underset{\sim}{A}_{ej}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j+\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j)\right\}\end{aligned}$$

代入如下方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underset{\sim}{X}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{X}}=Q_X$$

注意$\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\dot{X}}}=0$，得

$$m_v\ddot{\underset{\sim}{X}}-\underset{\sim}{A}_{eb}\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_v\dot{\underset{\sim}{\omega}}+\sum_{j=1}^{N}(-\underset{\sim}{A}_{ej}\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_j\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j+\underset{\sim}{A}_{ej}\underset{\sim}{P}_j\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j)=\underset{\sim}{Q}_X-\underset{\sim}{Q}'_{XN} \qquad (3-4-18)$$

这里的$\underset{\sim}{Q}'_{XN}$也是与非线性项有关的当量力：

$$\underset{\sim}{Q}'_{XN}=\left\{-\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_v\underset{\sim}{\omega}+\sum_{j=1}^{N}(-\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_j\underset{\sim}{\Omega}_j+2\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j+\underset{\sim}{A}_{ej}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j+\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j)\right\}$$

(3－4－18)的左侧各项的系数，正是(3－3－26)的$\underset{\sim}{M}$阵的第一行在$\underset{\sim}{D}_j=0$和$\underset{\sim}{B}_j=0$(中心体为刚体的结果)时的诸系数.(3－4－18)式的左侧的$\underset{\sim}{Q}'_{XN}$与令$\underset{\sim}{D}_j$和$\underset{\sim}{B}_j$为零后的(3－3－27)式的第一行相比略有不同.在(3－3－27)中(注意$\underset{\sim}{\tau}_B=0$)

$$\underset{\sim}{Q}_{XN}=\left\{-\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_B\underset{\sim}{\omega}+\sum_{j=1}^{N}(-\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_j\underset{\sim}{\omega}_j-\underset{\sim}{A}_{eb}m_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega}+2\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j+\underset{\sim}{A}_{ej}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j+\underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j)\right\}$$

注意表3－1关于$\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_v$的表达式就可以很容易证明两者事实上是相等的，就是说应用虚功方程求出的$\underset{\sim}{Q}_{XN}$与由Lagrarge第二方程求得的$\underset{\sim}{Q}'_{XN}$是一致的.

类似以上过程，对q的各个广义坐标利用(3－4－1)的Lagrange第二方程，最后可得出方程

$$\underset{\sim}{M}\dot{\underset{\sim}{Y}}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{q}=\underset{\sim}{Q}-\underset{\sim}{Q}_N \qquad (3-4-19)$$

其中的广义质量阵$\underset{\sim}{M}$仍如(3－3－26)(差别仅在于这里的中心体是刚体，$\underset{\sim}{D}_j=\underset{\sim}{B}_j=0$，因而相应的各行及各列元素应消去)，广义刚阵$\underset{\sim}{K}$仍如(3－3－28)，也因这里中心体是刚体，也应删去与$\underset{\sim}{\tau}_B$有关的行和列.非线性力$\underset{\sim}{Q}_N$则仍如(3－3－27)，当然要删去$\underset{\sim}{D}_j$和$\underset{\sim}{B}_j$有关项及与$\underset{\sim}{\tau}_B$有关行($\underset{\sim}{Q}_{rBN}$行).

如果这里考虑的中心体也是弹性体，那么$\underset{\sim}{M}$，$\underset{\sim}{K}$及$\underset{\sim}{Q}_N$都与上一节推导的(3－3－26)，(3－3－27)和(3－3－28)一样.

我们都知道，在分析力学中，Lagrange第二方程是以虚功原理为基础而求得的.本节用Lagrange第二方程推导多柔体簇系统动力学方程时，又采取了与上一节中相同的广义位移和相同的假设(弹性小位移假设)，这样得出的动力学方程与用虚功原理推导出的基本方程必然是完全相符的.

在推导过程中，当求惯性力虚功和动能时两者都进行了差不多繁琐的运算；但是用Lagrange法在代入(3－4－1)求最终方程时还要做相当繁琐的求导工作，这是Lagrange法的一个缺点.

§5. Kane方程的基本概念

Kane方程是T. R. Kane在1965年为解决非完整系统动力学问题而提出的.后来被广泛应用于航天器多柔体系统动力学方程的建立[44—46].Kane方程又称为具有虚功率形式的d'Alembert原理或Gibbs形式的d'Alembert原理，因为它实质上是未引进加速能的Gibbs－Appell方程.我们可以参照§2中推导虚功原理的思路来推导Kane方程.

像在本章§2中一样，我们考虑具有N个质点的系统，其d'Alembert方程的标量形

式为

$$-m_k a_k + f_{ek} + f_{ck} = 0 \qquad k = 1,2,\cdots,3N \tag{3-5-1}$$

该式表示在广义坐标 q_k 方向投影的平衡条件.

对于诸广义坐标还有 m 个(3-2-5)形式的约束条件，全式除以 dt 后，令$\frac{dq_k}{dt}=\dot{q}_k$，又可有

$$\sum_{k=1}^{3N} A_{jk}\dot{q}_k + B_j = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,m$$

同样，定义一个虚速度 $\delta\dot{q}_k$，令

$$\sum_{k=1}^{3N} A_{jk}\delta\dot{q}_k = 0 \tag{3-5-2}$$

这个式子的物理概念为，该虚速度 $\delta\dot{q}^T=(\delta\dot{q}_1,\cdots,\delta\dot{q}_k,\cdots,\delta\dot{q}_{3N})$ 是与 $\varphi_j(q_1,\cdots,q_{3N})$ 表面的法线向量 $A_j^T=(A_{j1},\cdots,A_{jk},\cdots,A_{j3N})$ 正交的，或者说虚速度是沿约束表面发生的.

这里顺便说明，(3-5-2)是约束条件的更一般形式，当(3-5-2)式可以积分成(3-2-4)的有限形式时，这种约束称为完整约束. 当(3-5-2)不能被积分成(3-2-4)的有限形式时，它被称为非完整约束.

现在我们来证明无论对于完整约束还是非完整约束，只要约束是理想的，即有(3-5-2)式，诸约束反力与虚速度的乘积的总和 δP_c 总是零，

$$\delta P_c = \sum_{k=1}^{3N} f_{ck}\delta\dot{q}_k = 0! \tag{3-5-3}$$

证明思路与第二节证明 $\delta W_c=0$ 时完全相同，不再赘述. 这里我们将 δP_c 称为约束力所作的虚功率，因为它的量纲是功率的量纲.

这样我们可由(3-5-1)式得出：

$$\sum_{k=1}^{3N}(-m_k a_k + f_{ek})\delta\dot{q}_k = 0 \tag{3-5-4}$$

或根据(3-2-1)的向量形式写作

$$\sum_{j=1}^{N}(-m_i\vec{a}_i + \vec{f}_{ei})\cdot\delta\vec{v}_i = 0 \tag{3-5-5}$$

这里 $\delta\vec{v}_i$ 是虚速度向量，它的分量与满足(3-5-2)约束条件的广义虚速度 $\delta\dot{q}_k$ 是线性相关的. (3-5-4)和(3-5-5)两式中都不包括约束力的虚功率项，因为根据理想约束的假设，由(3-5-3)知它恒为零，(3-5-5)式又可写作

$$\delta P = \delta P_I + \delta P_e = 0 \tag{3-5-6}$$

即惯性力的虚功率与主动力的虚功率之和为零. 其中，惯性力虚功率为

$$\delta P_I = -\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i\cdot\delta\vec{v}_i \tag{3-5-7}$$

外力虚功率为

$$\delta P_e = \sum_{i=1}^{N}\vec{f}_{ei}\cdot\delta\vec{v}_i \tag{3-5-8}$$

$\sum_{i=1}^{N}$ 表示总和遍及于全部质点，即遍及全系统.

(3-5-6)称为虚功率原理，它表明在理想约束条件下，一系统若处于平衡，则其惯性

力虚功率与主动力虚功率的总和为零；反之，若系统总虚功率为零，则系统处于平衡.

(3－5－6)的虚功率原理还可以推广到连续弹性体情况. 与虚功原理情况相似，这时惯性力虚功率和主动力虚功率分别写作

$$\delta P_I = -\int_B \vec{a}\cdot\delta\vec{v}dm \tag{3-5-9}$$

$$\delta P_e = \int_B \vec{f}\cdot\delta\vec{v}dm \tag{3-5-10}$$

此外，在总虚功率 δP 中，还要包括弹性内力的虚功率. 当以模态坐标表达弹性位移时，可定义弹性内力虚功率 δP_N 为

$$\delta P_N = -\delta\dot{\underset{\sim}{\tau}}^T\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\tau} \tag{3-5-11}$$

这样虚功率原理就变成

$$\delta P_I + \delta P_e + \delta P_N = 0 \tag{3-5-12}$$

进一步可引入偏速度 W_k(它事实上就是 Gibbs 提出的准速度)，而令

$$\delta\vec{v} = \sum_{k=1}^{N}\vec{G}_k W_k \tag{3-5-13}$$

这样，将(3－5－13)的虚速度代入(3－5－9)和(3－5－10)，分别求得

$$\delta P_I = -\int_B \vec{a}\cdot\Big(\sum_{k=1}^{N}\vec{G}_k W_k\Big)dm = -\sum_{k=1}^{N}\Big(\int_B(\vec{a}\cdot\vec{G}_k)dm\Big)W_k = \sum_{k=1}^{N} f_{Ik}^{*}W_k \tag{3-5-14}$$

其中

$$f_{Ik}^{*} = -\int_B \vec{a}\cdot\vec{G}_k dm \tag{3-5-15}$$

称为与偏速度 W_k 对应的第 k 阶广义惯性力；而

$$\delta P_e = \int_B \vec{f}\cdot\Big(\sum_{k=1}^{N}\vec{G}_k W_k\Big)dm = \sum_{k=1}^{N}\Big(\int_B \vec{f}\cdot\vec{G}_k dm\Big)W_k$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f_{ek}^{*}W_k \tag{3-5-16}$$

与偏速度 W_k 对应的第 k 阶广义外力(广义主动力)则是

$$f_{ek}^{*} = \int\vec{f}_e\cdot\vec{G}_k dm \tag{3-5-17}$$

当然，如果系统是弹性体，则模态坐标的时间导数的变分 $\delta\dot{\tau}$ 也应被取为 $W^T=(W_1,\cdots,W_k,\cdots,W_N)$ 中的一部分，这样

$$\delta P_N = -W^T f_N^{*} = -\sum_{k=1}^{N} W_k f_{Nk}^{*} \tag{3-5-18}$$

与模态坐标偏速度 W_k 对应的第 K 阶广义内力为

$$f_N^{*} = -\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\tau}; \quad \text{或} \quad f_{Nk}^{*} = -\omega_k^2\tau_k \tag{3-5-19}$$

式中 f_{Nk}^{*}是广义弹性力，f_N^{*} 是以 f_{Nk}^{*}为元素的广义弹性力列阵.

这样 $\delta P=0$ 就变成

$$\sum_{k=1}^{N}(f_{Ik}^{*} + f_{ek}^{*} + f_{Nk}^{*})W_k = 0$$

由于偏速度 W_k 是独立的任意量，上式的总和为零的充要条件是括号(…)内量恒为

零，即

$$f_{Ik}^{*} + f_{ck}^{*} + f_{Nk}^{*} = 0, \qquad k = 1,2,\cdots,N \tag{3-5-20}$$

这个方程称为 Kane 方程. 它实质上就是未引进加速度能的 Gibbs - Appell 方程.

式中 f_{Ik}^{*}，f_{ck}^{*} 和 f_{Nk}^{*} 分别称为系统的与偏速度 W_k 对应的第 k 阶广义惯性力、广义外力(广义主动力)和广义内力(广义弹性力). 其计算分别见(3-5-15)，(3-5-17)和(3-5-19).

§6. 用 Kane 法建立多柔体簇系统动力学方程[74]

由上节叙述可知，Kane 法中的一个重要概念是偏速度. 偏速度的概念比较灵活，它的选定富于技巧性. 这是 Kane 法的优点，也是 Kane 法的难点.

在应用 Kane 法推导有 N 个弹性附件的多柔体簇系统动力学方程时，我们很容易想到的一个选择就是选取对应于前几节中的广义坐标 $q^T = (\underset{\sim}{X}^T, \varphi^T, \underset{\sim}{\tau}_B^T, \underset{\sim}{\psi}_1^T, \underset{\sim}{\tau}_1^T, \cdots, \underset{\sim}{\psi}_k^T, \underset{\sim}{\tau}_k^T, \cdots, \underset{\sim}{\psi}_N^T, \underset{\sim}{\tau}_N^T)$ 的时间导数作为偏速度. 设偏速度列阵为 $\underset{\sim}{W}^T = (\underset{\sim}{W}_1^T, \underset{\sim}{W}_2^T, \cdots)$，则显然可有

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{W}_1 = \dot{\underset{\sim}{X}} && \underset{\sim}{W}_{2k+2} = \dot{\underset{\sim}{\psi}}_k = \underset{\sim}{\Omega}_k \\
&\underset{\sim}{W}_2 = \dot{\varphi} = \underset{\sim}{\omega} && \underset{\sim}{W}_{2k+3} = \dot{\underset{\sim}{\tau}}_k \\
&\underset{\sim}{W}_3 = \dot{\underset{\sim}{\tau}}_B && \vdots \\
&\underset{\sim}{W}_4 = \dot{\underset{\sim}{\psi}}_1 = \underset{\sim}{\Omega}_1 && \vdots \\
&\underset{\sim}{W}_5 = \dot{\underset{\sim}{\tau}}_1 && \underset{\sim}{W}_{2N+3} = \dot{\underset{\sim}{\tau}}_N \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3-6-1}$$

至于(3-5-20)Kane 方程中的广义力公式，对于多柔体簇系统，显然也要先按各体分别计算，再求总和. 例如对于广义惯性力，应为

$$f_{Ik}^{*} = \sum_{j=1}^{N} f_{Ik,j}^{*} + f_{Ik,B}^{*} \tag{3-6-2}$$

其中三个下标的含义分别是：第一个下标表示它是广义惯性力，第二个下标表示它是与偏速度 $\underset{\sim}{W}_k$ 对应的第 k 阶广义惯性力，而第三个下标则表示它是属于哪个体的.

同样，对于广义外力也是这样. 不过它和在虚功原理中求广义外力的作法没有原则区别，这里不再讨论.

下面我们先讨论中心体 B 的广义惯性力 $f_{Ik,B}^{*}$. 对于中心体 B，由(3-3-5)已知它上面的微元质量 dm 的速度为

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{X}} - \vec{\rho}_B \times \vec{\omega} + \dot{\vec{u}}_B + \vec{\omega} \times \vec{u}_B$$

采用模态坐标 $\underset{\sim}{\tau}_B$ 表达中心体的弹性位移，则有

$$\vec{v}_B = \underset{\sim}{e}^T \dot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{b}^T \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B \underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{T}_B \dot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{b}^T \tilde{\underset{\sim}{\omega}} \underset{\sim}{T}_B \underset{\sim}{\tau}_B$$

其中各项的含义已在 §3 中定义. 注意虚速度和虚位移类似，定义为无穷小的速度增量，因此，求虚速度时，上式中的非线性项应被略去，即

$$\delta\vec{v}_B = \dot{\vec{X}} - \vec{\rho}_B \times \vec{\omega} + \dot{\vec{u}}_B$$

$$= \underset{\sim}{e}^T\dot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\underset{\sim}{\omega} + b^T\underset{\sim}{T}_B\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B \tag{3-6-3}$$

对照(3-6-1)的偏速度 $\underset{\sim}{W}_k$，可得以偏速度 $\underset{\sim}{W}_k$ 表达的虚速度为

$$\delta\vec{v}_B = \underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{W}_1 - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\underset{\sim}{W}_2 + \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{W}_3 + \sum_{k=4}^{N}\vec{G}_k\underset{\sim}{W}_k$$

与(3-5-13)式对比可得关于中心体 B 的 $\vec{G}_k$，

$$\vec{G}_1 = \underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{I}, \qquad \vec{G}_3 = \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_B$$
$$\vec{G}_2 = -\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B,$$
$$\vec{G}_k = 0 \qquad \text{当 } k > 3 \text{ 时} \tag{3-6-4}$$

对于中心体 B，由(3-3-7)知其微元质量 dm 的加速度 $\vec{a}_B$ 为

$$\vec{a}_B = \underset{\sim}{e}^T\ddot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_B\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \{\underset{\sim}{b}^T\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\,\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{\tau}_B + 2\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{T}_B\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{\tau}_B\} \tag{3-6-5}$$

将(3-6-5)代入到中心体广义惯性力公式

$$f^*_{Ik,B} = -\int_B \vec{a}_B\cdot\vec{G}_k dm \tag{3-6-6}$$

可以分别求得

$$\begin{aligned} f^*_{I1,B} &= -\int_B \vec{G}_1\cdot\vec{a}_B dm \\ &= -\int_B \underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{e}\cdot[\underset{\sim}{e}^T\ddot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_B\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \{\underset{\sim}{b}^T\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\,\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{\tau}_B \\ &\quad + 2\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{T}_B\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{\tau}_B\}]dm \\ &= -[m_b\ddot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{S}}_B\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{A}_{eb}\underset{\sim}{P}_B\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \{\underset{\sim}{A}_{eb}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\,\underset{\sim}{P}_B\underset{\sim}{\tau}_B \\ &\quad + 2\underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{P}_B\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B - \underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{S}}_B\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{P}_B\underset{\sim}{\tau}_B\}] \end{aligned} \tag{3-6-7}$$

$$\begin{aligned} f^*_{I2,B} &= -\int_B \vec{G}_2\cdot\vec{a}_B dm = -\int_B -\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B^T\underset{\sim}{b}\cdot[\underset{\sim}{e}^T\ddot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_B\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B \\ &\quad + \{\underset{\sim}{b}^T\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\,\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{\tau}_B + 2\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{T}_B\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{\tau}_B\}]dm \\ &= -[-\tilde{\underset{\sim}{S}}_B^T\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{J}_B\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{H}_B\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \{\underset{\sim}{J}_{\omega B}\underset{\sim}{\omega} + \dot{\underset{\sim}{H}}_{\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B \\ &\quad + 2\underset{\sim}{H}_{\omega B}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{H}_{\omega\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B\}] \end{aligned} \tag{3-6-8}$$

$$\begin{aligned} f^*_{I3,B} &= -\int_B \vec{G}_3\cdot\vec{a}_B dB = -\int_B \underset{\sim}{T}_B^T\underset{\sim}{b}\cdot[\underset{\sim}{e}^T\ddot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_B\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B \\ &\quad + \{\underset{\sim}{b}^T\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\,\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{\tau}_B + 2\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{T}_B\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_B\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{T}_B\underset{\sim}{\tau}_B\}]dm \\ &= -[\underset{\sim}{P}_B^T\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{H}_B^T\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{I}\,\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \{\underset{\sim}{H}_{\omega B}^T\underset{\sim}{\omega} + \dot{\underset{\sim}{F}}_{\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B + 2\underset{\sim}{F}_{\omega B}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{F}_{\omega\omega B}\underset{\sim}{\tau}_B\}] \end{aligned} \tag{3-6-9}$$

$$f^*_{Ik} = 0, \text{ 当 } k > 3 \text{ 时} \tag{3-6-10}$$

请读者把它们与(3-3-9)的小括号内的诸式比较.

进一步，我们再求 A_j 弹性附件的广义惯性力 $f^*_{Ik,j}$. 对照(3-3-17)的关于 A_j 附件的微元质量 dm 的速度 $\vec{v}_j$ 的表达式，略去高阶项，可得虚速度 $\delta\vec{v}_j$ 为

$$\delta\vec{v}_j = \dot{\vec{X}} - \vec{\rho}_{cj} \times \vec{\omega} - \vec{\rho}_j \times \vec{\Omega}_j - \vec{\rho}_j \times \dot{\vec{\beta}}_j + \dot{\vec{u}}_j + \dot{\vec{\Delta}}_j$$

式中各项含义已在第 3 节中定义. 倘以模态坐标 $\underset{\sim}{\tau}_j$ 表达 A_j 附件的弹性位移 u_j，则上式又可写成

$$\delta\vec{v}_j = \underset{\sim}{e}^T\dot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{cj}\underset{\sim}{\omega} - \underset{\sim}{a}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j\underset{\sim}{\Omega}_j - \underset{\sim}{a}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}\,\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{a}_j^T\underset{\sim}{T}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B$$

将(3－6－1)代入可得关于 A_j 部件的虚速度 $\delta\vec{v}_j$ 的以偏速度表达的公式

$$\begin{aligned}\delta\vec{v}_j = {} & \underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{W}_1 - \underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{cj}\underset{\sim}{W}_2 - \underset{\sim}{a}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j\underset{\sim}{W}_{2j+2} - \underset{\sim}{a}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}\,\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j\underset{\sim}{W}_3 \\ & + \underset{\sim}{a}_j^T\underset{\sim}{T}_j\underset{\sim}{W}_{2j+3} + \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{W}_3\end{aligned} \tag{3－6－11}$$

与(3－5－13)对比，可得

$$\begin{aligned}&\vec{G}_{1,j} = \underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{I}; \qquad \vec{G}_{2,j} = -\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{cj} \\ &\vec{G}_{3,j} = -\underset{\sim}{a}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j + \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{D}_j \\ &\vec{G}_{(2j+2),j} = \underset{\sim}{a}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j \\ &\vec{G}_{(2j+3),j} = \underset{\sim}{a}_j^T\underset{\sim}{T}_j\end{aligned} \tag{3－6－12}$$

以及其余诸 $\vec{G}_{kj}=0$. 然后，再由

$$f^*_{1k,j} = -\int_j \vec{a}_j \cdot \vec{G}_{kj}dm \tag{3－6－13}$$

根据(3－3－20)式的关于 A_j 附件的加速度 $\vec{a}_j$，可求得 A_j 附件的各阶广义惯性力：

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{f}^*_{I1,j} = {} & -[m_j\ddot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{S}}_{cj}\dot{\underset{\sim}{\omega}} - \underset{\sim}{A}_{ej}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j + \underset{\sim}{A}_{eb}(\underset{\sim}{m}_j\underset{\sim}{D}_j - \underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j)\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{A}_{ej}\underset{\sim}{P}_j\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j \\ & + \{\underset{\sim}{A}_{ej}(2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{P}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j - \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{S}}_j\underset{\sim}{\omega}_j) + \underset{\sim}{A}_{eb}(\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\,\underset{\sim}{m}_j\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B \\ & + 2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{m}_j\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B - \tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{m}_j\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega} + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{m}_j\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B)\}]\end{aligned} \tag{3－6－14}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{f}^*_{I2,j} = {} & -[-\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_{cj}\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{J}_{cj}\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{J}_{bj}\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j - (\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_{cj}\underset{\sim}{D}_j - \underset{\sim}{J}_{bj}\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j)\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{H}_{cj}\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j \\ & + \{(\dot{\underset{\sim}{H}}_{c\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j + 2\underset{\sim}{H}_{c\omega j}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{H}_{c\alpha\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j + \underset{\sim}{J}_{c\omega j}\underset{\sim}{\omega}_j) + (\dot{\tilde{\underset{\sim}{S}}}^T_{cj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B + 2\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_{cj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B \\ & + \tilde{\underset{\sim}{S}}^T_{cj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega} + \tilde{\underset{\sim}{S}}^T_{cj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B)\}]\end{aligned} \tag{3－6－15}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{f}^*_{I(2j+2),j} = {} & -[-\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_j\underset{\sim}{A}_{je}\ddot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{J}^T_{bj}\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{J}_j\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j - (\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{D}_j - \underset{\sim}{J}_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j)\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{H}_j\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j \\ & + \{(\dot{\underset{\sim}{H}}_{\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j + 2\underset{\sim}{H}_{\omega j}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{H}_{\alpha\omega j}\underset{\sim}{\tau}_j + \underset{\sim}{J}_{\omega j}\underset{\sim}{\omega}_j) + (\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_j\underset{\sim}{A}_{jb}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\,\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B \\ & + 2\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_j\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \tilde{\underset{\sim}{S}}^T_j\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega} + \tilde{\underset{\sim}{S}}^T_j\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B)\}]\end{aligned} \tag{3－6－16}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{f}^*_{I3,j} = {} & -[(-\underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_j\underset{\sim}{A}_{jb} + \underset{\sim}{D}^T_j\underset{\sim}{m}_j)\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{\underset{\sim}{X}} - (\underset{\sim}{D}^T_j\tilde{\underset{\sim}{S}}_{cj} - \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{J}_{bj})\dot{\underset{\sim}{\omega}} \\ & - (\underset{\sim}{D}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j - \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{J}_j)\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j + (\underset{\sim}{D}^T_j\underset{\sim}{D}_j + \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{J}_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j - \underset{\sim}{D}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{B}_j \\ & - \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_j\underset{\sim}{A}_{jb}\underset{\sim}{D}_j)\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + (\underset{\sim}{D}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{P}_j - \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{H}_j)\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j \\ & + \{(\underset{\sim}{D}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{P}_j - \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\dot{\underset{\sim}{H}}_{\omega j})\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + 2(\underset{\sim}{D}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{P}_j - \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{H}_{\omega j})\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j \\ & + (\underset{\sim}{D}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{P}_j - \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{H}_{\alpha\omega j})\underset{\sim}{\tau}_j - (\underset{\sim}{D}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{S}}_j - \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\underset{\sim}{J}_{\omega j})\underset{\sim}{\omega}_j \\ & + (\underset{\sim}{D}^T_j\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\,\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{m}_j - \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_j\underset{\sim}{A}_{jb}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}\,\underset{\sim}{D}_j)\underset{\sim}{\tau}_B + 2(\underset{\sim}{m}_j\underset{\sim}{D}^T_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j \\ & - \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_j\underset{\sim}{A}_{jb}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j)\dot{\underset{\sim}{\tau}}_B - (\underset{\sim}{m}_j\underset{\sim}{D}^T_j - \underset{\sim}{B}^T_j\underset{\sim}{A}_{bj}\tilde{\underset{\sim}{S}}^T_j\underset{\sim}{A}_{jb})(\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega} - \tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_B)\}]\end{aligned} \tag{3－6－17}$$

$$f^*_{i(2j+3),j} = -[P_j^T A_{jc}\ddot{X} + H_{cj}^T\dot{\omega} + H_j^T\dot{\Omega}_j + (P_j^T A_{jb}D_j - H_j^T A_{jb}B_j)\ddot{\tau}_B + I\ddot{\tau}_j$$
$$+ \{\dot{F}_{\omega j}\tau_j + 2F_{\omega j}\dot{\tau}_j + F_{\omega\omega j}\tau_j + H_{\omega j}^T\omega_j + P_j^T A_{jb}\dot{\tilde{\omega}}D_j\tau_B$$
$$+ 2P_j^T A_{jb}\tilde{\omega}D_j\dot{\tau}_B + P_j^T A_{jb}\tilde{\omega}\tilde{l}_j\omega + P_j A_{jb}\tilde{\omega}\tilde{\omega}D_j\tau_B\}] \qquad (3-6-18)$$

其余诸 $f^*_{i,k,j}=0$. 读者试与(3-3-22)式中方括号中诸项比较.

有了中心体和各附件的各阶广义惯性力后，可由(3-6-2)式求出系统的第 k 阶广义惯性力 f^*_{ik}

$$f^*_{ik} = f^*_{ik,B} + \sum_{j=1}^{N} f^*_{ik,j} \qquad (3-6-2)$$

至于系统的各阶广义外力，很容易求得为

$$f^*_{e,k} = Q_k \qquad (3-6-19)$$

系统的各阶广义弹性内力分别为

$$f^*_{N,1} = 0, \qquad f^*_{N,2} = 0 \qquad (3-6-20)$$

因为这是两个反映系统刚体位移和转动的自由度，自然没有弹性力. 当关节有弹性时，则有

$$f^*_{N,2j+2} = -K_j\psi_j \qquad (3-6-21)$$

其中 K_j 是第 j 关节的弹簧系数；对于各弹性体则有

$$f^*_{N,3} = -\Lambda_B\tau_B \qquad (3-6-22)$$

$$f^*_{N,2j+3} = -\Lambda_j\tau_j \qquad (3-6-23)$$

将上述诸式(3-6-7)—(3-6-10)和(3-6-14)—(3-6-18)和(3-6-19)—(3-6-23)全部代入 Kane 方程(3-5-20)中，整理后可得多柔体簇系统的动力学方程.

$$M\dot{Y} + Kq = Q - Q_N \qquad (3-6-24)$$

其中 M，K 和 Q_N 仍如(3-3-26)，(3-3-27)和(3-3-28)中诸式.

至此，我们先后用了虚功原理(虚功形式的 d'Alembert 原理)、Lagrange 第二方程，和 Kane 方程(虚功率形式的 d'Alembert 原理)推导了多柔体簇系统动力学方程. 在相同的假设(弹性小位移假设)下，取相同的广义坐标 $q^T=(X^T,\varphi^T,\tau_B^T,\cdots,\psi_k^T,\tau_k^T,\cdots,\psi_N^T,\tau_N^T)$，这三个方法得出相同的列式. 就是说，在同样的条件下，三法殊途同归. 从这个角度讲，对于完整约束系统，使用什么方法，主要看使用者的偏好和擅长. 但对于非完整约束系统，Kane 方程自然更适用些.

§7. 多柔体链系统的动力学方程[114,115,103,32]

多柔体链系统是工程上很有实用价值的一种多柔体系统. 带有可展开式附件(如可展开的太阳帆板、可展开的大型天线)的航天器和空间机械臂等都是典型的多柔体链系统. 地面机器人和一些工程机械(如掘土机等)也是多体链系统，但其部件多为刚体.

对于多体链系统，除去根体 B_1，其他每个体上都只有两个铰，一个内铰和一个外铰. 由任一个体 B_j 到根体只有一条通路. 对于根体则可能有多条链平行装设其上，例如图3-6的空间机器人，上面有三条平行的链. 这时根体上除一个假想内铰(设于参考点 CM

上，即连体参考系 $\underline{b}_1$ 的原点上）以外，可能有多个外铰. 但属于每个链的仍只有一个外铰. 由于多体链系统的拓扑关系简单，在每条链采用第二章所述的规则编号法后就不再需要另外的描述了.

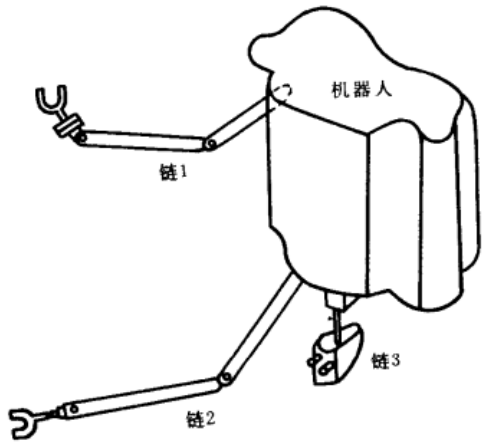


图 3－6　自由飞行机器人——有三个平行链的多体链系统

由前面推导多柔体簇系统动力学方程的过程我们知道，无论采用什么方法都需要先求出典型体 B_p 上的微元质量的位置向量 $\vec{R}_p$ 和角速度向量 $\vec{\omega}_p$. 正如在第二章中曾经说过的，描述这种向量关系可以有两种方法. 一种称之为向量链的方法，有的文献称之为直接通路法. 另一种称之为向量对的方法. 采用向量链描述方法，求得的是一种耦合型的动力学方程，这样在求解时自然十分费时间；但也因为方程中包括了全部广义坐标，可能在提供控制系统设计所需的设计模型时是有好处的. 采用向量对的描述形式，求得的可以是递推型的动力学方程，即每一组方程中只包括相邻（连于同一铰上的）两个体的有关的广义坐标，并可以用递推格式求解. 用递推型的动力学方程可以提高计算效率，特别是与并行计算机技术结合，可能满足实时仿真的需要. 本节介绍耦合型的多柔体链系统的动力学方程.

考虑到链内诸体不一定全部是柔性体，为了识别，并使编制程序方便，引入符号 μ_i. 倘 $\mu_i=0$，则 B_i 体是刚体，倘 $\mu_i=1$，则 B_i 体是柔性体. 对于任意体 B_p，倘是柔性体（$\mu_p=1$），则有弹性位移. 弹性位移是相对于 B_p 体的连体坐标参考系 $\underline{b}_p$ 原点量取的. 这个原点一般取在 B_p 体的内铰 h_p 处. 弹性变形在 B_p 体的外铰 h_{p+1} 处有弹性位移 $\vec{\Delta}_p$ 和弹性转角 $\vec{\beta}_p$（图 3－7）. 由第 2 章的（2－3－3）式，或参看图 3－7 可知所研究的 B_k 体上微元质量 dm 到惯性参考系中心的距离向量为

$$\begin{aligned}\vec{R}_k &= \vec{X} + \sum_{p=1}^{k-1}\vec{l}_p + \vec{\rho}_k + \vec{u}_k \\ &= \vec{X} + \sum_{p=1}^{k-1}(\vec{l}_p + \vec{\Delta}_p) + \vec{\rho}_k + \vec{u}_k \end{aligned} \qquad (3-7-1)$$

式中 $\vec{X}$ 是根体的内铰所在点（即参考点 CM）距惯性参考系中心的距离；$\vec{l}_p$ 是变形前典型

体 B_p 体的铰间向量，$\vec{\Delta}_p$ 是 B_p 体的外铰 h_{p+1} 处的弹性位移. $\vec{\rho}_k$ 是所研究的 B_k 体上微元质量变形前在连体参考系 $\underset{\sim}{b}_k$ 内的距离；$\vec{u}_k$ 是该微元质量的弹性位移. 通常采用模态坐标描述这些弹性位移. 这样上述诸量的矩阵形式为

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \underset{\sim}{e}^T \underset{\sim}{X}, \qquad \vec{l}_p = \underset{\sim}{b}_p^T \underset{\sim}{l}_p, \qquad \vec{\rho}_k = \underset{\sim}{b}_k^T \underset{\sim}{\rho}_k \\ \vec{\Delta}_p &= \underset{\sim}{b}_p^T \underset{\sim}{D}_p \underset{\sim}{\tau}_p, \qquad \vec{u}_k = \underset{\sim}{b}_k^T \underset{\sim}{T}_k \underset{\sim}{\tau}_k \end{aligned} \tag{3-7-2}$$

式中 $\underset{\sim}{T}_k$ 是 $\underset{\sim}{B}_k$ 体的固有模态阵，$\underset{\sim}{\tau}_p$ 和 $\underset{\sim}{\tau}_k$ 分别是 B_p 体和 B_k 体的模态坐标，$\underset{\sim}{D}_p$ 则是 B_p 体的固有模态在外铰处的值.

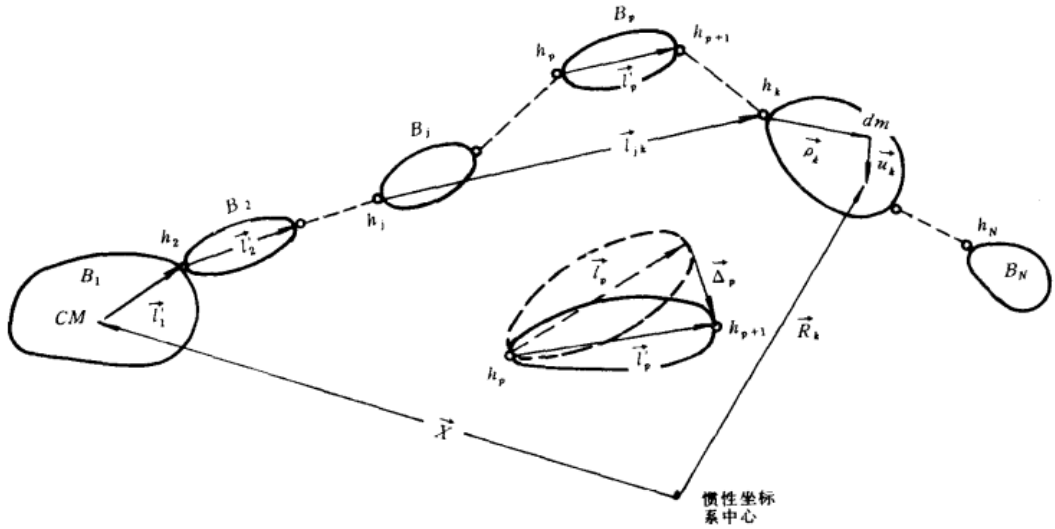


图 3-7　多柔体链系统示意图

至于所研究体 B_k 相对于惯性参考系的角速度 $\vec{\omega}_k$ 可由第二章的(2-3-10)式求出为

$$\vec{\omega}_k = \vec{\omega}_1 + \sum_{p=2}^{k} \vec{\Omega}_p + \sum_{p=1}^{k-1} \dot{\vec{\beta}}_p = \sum_{j=1}^{k} \vec{\Omega}_j + \sum_{j=1}^{k-1} \dot{\vec{\beta}}_j \tag{3-7-3}$$

式中 $\vec{\omega}_1 = \vec{\Omega}_1$ 是根体相对于惯性参考系的角速度，$\vec{\Omega}_p$(或 $\vec{\Omega}_j$)是典型体 B_p(或 B_j)相对其内接体 B_{p-1}(或 B_{j-1})的相对角速度，$\dot{\vec{\beta}}_p$(或 $\dot{\vec{\beta}}_j$)是由于 $B_p(B_j)$体的弹性变形引起的在其外铰 h_{p+1}(或 h_{j+1})处的弹性转角引起的角速度. 显然

$$\vec{\omega}_1 = \underset{\sim}{b}_1^T \underset{\sim}{\omega}_1, \qquad \vec{\omega}_k = \underset{\sim}{b}_k^T \underset{\sim}{\omega}_k \tag{3-7-4}$$

$$\vec{\Omega}_p = \underset{\sim}{b}_p^T \underset{\sim}{\Omega}_p, \qquad \dot{\vec{\beta}}_p = \underset{\sim}{b}_p^T \underset{\sim}{B}_p \dot{\underset{\sim}{\tau}}_p$$

这里 B_p 是典型体 B_p 的固有模态的弹性转角在外铰 h_{p+1} 处的值. 关于 $\underset{\sim}{B}_p$ 和 $\underset{\sim}{D}_p$ 读者可参看第 3 节的例题.

为了方便表达(3-7-1)和(3-7-3)两式的求总和运算及其后继运算，Hughes 引用了两个符号[32]：

$$H_i(m) = \begin{cases} 1, & m \geqslant 0 \\ 0, & m < 0 \end{cases}$$

$$H_2(m)=\begin{cases}0, & m\geqslant 0\\ 1, & m<0\end{cases}$$

倘若令 $m=p-k$，则这时

$$H_1(m)=H_1(p-k)=\begin{cases}1 & p\geqslant k\\ 0 & p<k\end{cases} \tag{3-7-5}$$

$$H_2(m)=H_2(p-k)=\begin{cases}0 & p\geqslant k\\ 1 & p<k\end{cases} \tag{3-7-6}$$

这样，(3-7-1)和(3-7-3)两式就分别写作

$$\vec{R}_k=\vec{X}+\sum_p H_2(p-k)(\vec{l}_p+\vec{\Delta}_p)+\vec{\rho}_k+\vec{u}_k \tag{3-7-7}$$

$$\vec{\omega}_p=\sum_j H_1(p-j)\vec{\Omega}_j+\sum_j H_2(j-p)\dot{\vec{\beta}}_j \tag{3-7-8}$$

总和 $\sum_j$ 和 $\sum_p$ 的范围都是自1到N，其中N是链内体的总数. 但 $\sum_p H_2(p-k)(\cdots\cdots)$ 的求和运算根据(3-7-6)显然表示其值等于和大于 k 的 p 将不进入求和的运算；而根据(3-7-5)，$\sum_j H_1(p-j)(\cdots\cdots)$ 则表示大于 p 的 j 将不进入求和运算.

根据附录A关于求在动坐标系内向量的时间导数的规则，可以求得微元质量 dm 的速度 $\vec{v}_k$ 和加速度 $\vec{a}_k$ 分别为

$$\begin{aligned}\vec{v}_k&=\frac{D\vec{R}_k}{Dt}=\dot{\vec{X}}+\sum_p H_2(p-k)[\vec{\omega}_p\times\vec{l}_p+\dot{\vec{\Delta}}_p]\\&\quad+\vec{\omega}_k\times\vec{\rho}_k+\dot{\vec{u}}_k+\vec{\omega}_k\times\vec{u}_k\end{aligned} \tag{3-7-9}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_k&=\frac{D\vec{v}_k}{Dt}=\ddot{\vec{X}}+\sum_p H_2(p-k)[\dot{\vec{\omega}}_p\times\vec{l}_p+\ddot{\vec{\Delta}}_p]+\dot{\vec{\omega}}_k\times\vec{\rho}_k+\ddot{\vec{u}}_k\\&\quad+\{\sum_p H_2(p-k)[\vec{\omega}_p\times(\vec{\omega}_p\times\vec{l}_p)+\dot{\vec{\omega}}_p\times\vec{\Delta}_p+2\vec{\omega}_p\times\dot{\vec{\Delta}}_p\\&\quad+\vec{\omega}_p\times(\vec{\omega}_p\times\vec{\Delta}_p)]+\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{\rho}_k)+\dot{\vec{\omega}}_k\times\vec{u}_k\\&\quad+2\vec{\omega}_k\times\dot{\vec{u}}_k+\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{u}_k)\}\end{aligned} \tag{3-7-10}$$

式中{……}内的表达式是相应的非线项. 再将(3-7-8)式关于角速度的表达式用适当的下标表示并代入 $\vec{a}_k$ 式的线性部分的 $\vec{\omega}_p$ 和 $\vec{\omega}_k$ 之中，则可得到

$$\begin{aligned}\vec{a}_k&=\ddot{\vec{X}}+\sum_p H_2(p-k)\Big[\Big(\sum_j H_1(p-j)\vec{\Omega}_j+\sum_j H_2(j-p)\dot{\vec{\beta}}_j\Big)\times\vec{l}_p\Big]\\&\quad+\sum_p H_2(p-k)\ddot{\vec{\Delta}}_p+\Big[\Big(\sum_j H_1(k-j)\vec{\Omega}_j+\sum_j H_2(j-k)\dot{\vec{\beta}}_j\Big)\times\vec{\rho}_k\Big]\\&\quad+\ddot{\vec{u}}_k+\{\sum_p H_2(p-k)[\vec{\omega}_p\times(\vec{\omega}_p\times\vec{l}_p)+\dot{\vec{\omega}}_p\times\vec{\Delta}_p\\&\quad+2\vec{\omega}_p\times\dot{\vec{\Delta}}_p+\vec{\omega}_p\times(\vec{\omega}_p\times\vec{\Delta}_p)]+\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{\rho}_k)+\dot{\vec{\omega}}_k\times\vec{u}_k\\&\quad+2\vec{\omega}_k\times\dot{\vec{u}}_k+\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{u}_k)\}\end{aligned} \tag{3-7-11}$$

现在看上式的第二项

$$\sum_p H_2(p-k)\sum_j H_1(p-j)\vec{\Omega}_j\times\vec{l}_p=-\sum_j\sum_p H_1(p-j)H_2(p-k)\vec{l}_p\times\vec{\Omega}_j \tag{3-7-12}$$

在这里 k 表示我们所研究的物体的编号是 B_k，在求总和中是个固定值；j 是 B_k 到 B_1 途中典型体 B_j 的编号，请参看图 3-7；而 p 又是介于 B_j 和 B_k 之间的体. $H_1(p-j)$和 $H_2(p-k)$两符号联合使用的含义则是说小于 j 的 p 和大于等于 k 的 p 都不在求和范围之内，即 $j\leqslant p<k$. 这样

$$\sum_p H_1(p-j)H_2(p-k)\vec{l}_p=\sum_{p=j}^{k-1}\vec{l}_p=\vec{l}_{jk} \tag{3-7-13}$$

当然求和变量 j 应小于 k. 这样(3-7-11)就可写作

$$\sum_p H_2(p-k)\sum_j H_1(p-j)\vec{\Omega}_j\times\vec{l}_p$$
$$=-\sum_j H_2(j-k)\vec{l}_{jk}\times\vec{\Omega}_j \tag{3-7-14}$$

式中的 $H_2(j-k)$反映了求和中 $j<k$ 的要求，而 $\vec{l}_{jk}$的物理意义是由 h_j 铰到 h_k 铰间的距离，参看图(3-7). 为了后继运算方便，将 $\vec{l}_{jk}$定义在 B_j 的连体坐标系 $\underset{\sim}{b}_j$ 内，即

$$\vec{l}_{jk}=\underset{\sim}{b}_j^T\underset{\sim}{l}_{jk} \tag{3-7-15}$$

这样(3-7-13)式又可以用矩阵形式写为

$$\sum_p H_2(p-k)\sum_j H_1(p-j)\vec{\Omega}_j\times\vec{l}_p$$
$$=-\sum_j H_2(j-k)\underset{\sim}{b}_j^T\widetilde{\underset{\sim}{l}}_{jk}\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j \tag{3-7-16}$$

显然$-\vec{l}_{jk}\times\dot{\vec{\Omega}}_j$ 的物理意义是：绕 h_j 铰的角加速度 $\dot{\vec{\Omega}}_j$ 引起的 h_k 铰处的线加速度.

再研究(3-7-11)中的第三项，即

$$\sum_p H_2(p-k)\sum_j H_2(j-p)\ddot{\vec{\beta}}_j\times\vec{l}_p=-\sum_j\sum_p H_2(p-k)H_2(j-p)\vec{l}_p\times\ddot{\vec{\beta}}_j$$

显然，$H_2(p-k)H_2(j-p)$相当于要求 $j<p<k$，且在求和中不包括 $p=j$ 情况. 这样

$$\sum_p H_2(p-k)\sum_j H_2(j-p)\ddot{\vec{\beta}}_j\times\vec{l}_p=-\sum_j H_2(j-k)\vec{l}_{j+1,k}\times\ddot{\vec{\beta}}_j \tag{3-7-17}$$

显然，$-\vec{l}_{j+1,k}\times\ddot{\vec{\beta}}_j$ 的物理意义是：当 B_j 是弹性体(即 $\mu_j=1$)，B_j 弹性变形在 h_{j+1}铰处产生的弹性转动加速度 $\ddot{\vec{\beta}}_j$ 在 h_k 铰引起的线加速度.

将(3-7-17)和(3-7-14)代入(3-7-11)，最后有

$$\vec{a}_k=\ddot{\vec{X}}-\sum_j H_2(j-k)\vec{l}_{jk}\times\dot{\vec{\Omega}}_j-\sum_j H_2(j-k)\vec{l}_{j+1,k}\times\ddot{\vec{\beta}}_j$$
$$+\sum_j H_2(j-k)\ddot{\vec{\Delta}}_j-\sum_j H_1(k-j)\vec{\rho}_k\times\dot{\vec{\Omega}}_j-\sum_j H_2(j-k)\vec{\rho}_k\times\ddot{\vec{\beta}}_j$$
$$+\ddot{\vec{u}}_k+\{\sum_j H_2(j-k)[(\vec{\omega}_j\times\vec{\omega}_j\times\vec{l}_j)+\dot{\vec{\omega}}_j\times\vec{\Delta}_j$$

$$+2\vec{\omega}_j\times\dot{\vec{\Delta}}_j+\vec{\omega}_j\times(\vec{\omega}_j\times\vec{\Delta}_j)]+\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{\rho}_k)$$
$$+\dot{\vec{\omega}}_k\times\vec{u}_k+2\vec{\omega}_k\times\dot{\vec{u}}_k+\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{u}_k)\}\qquad(3-7-18)$$

我们再像在推导多柔体簇系统动力学方程时一样，用各体的模态坐标 $\underset{\sim}{\tau}_j$ 描述其弹性变形，即

$$\vec{u}_j=\underset{\sim}{b}_j^T\underset{\sim}{T}_j\underset{\sim}{\tau}_j,\qquad\vec{\Delta}_j=\underset{\sim}{b}_j^T\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_j,\qquad\vec{\beta}_j=\underset{\sim}{b}_j^T\underset{\sim}{B}_j\underset{\sim}{\tau}_j\qquad(3-7-19)$$

并且选定广义坐标 $\underset{\sim}{q}$ 为

$$\underset{\sim}{q}^T=(\underset{\sim}{X}^T,\underset{\sim}{\psi}_1^T,\underset{\sim}{\tau}_1^T,\cdots,\underset{\sim}{\psi}_k^T,\underset{\sim}{\tau}_k^T,\cdots,\underset{\sim}{\psi}_N^T,\underset{\sim}{\tau}_N^T)\qquad(3-7-20)$$

这里

$$\dot{\underset{\sim}{\psi}}_1=\underset{\sim}{\Omega}_1=\underset{\sim}{\omega}_1,\qquad\text{而}\quad\dot{\underset{\sim}{\psi}}_k=\underset{\sim}{\omega}_k\qquad(3-7-21)$$

这样根据典型体 B_k 的微元质量 dm 的速度 $\vec{v}_k$ 可以确定它的动能

$$T_k=\frac{1}{2}\int_k\vec{v}_k\cdot\vec{v}_k dm\qquad(3-7-22)$$

同时还可有关于 B_k 体的应变能

$$U_k=\frac{1}{2}\underset{\sim}{\tau}_k^T\underset{\sim}{\Lambda}_k\underset{\sim}{\tau}_k+\frac{1}{2}\underset{\sim}{\psi}_k^T\underset{\sim}{K}_k\underset{\sim}{\psi}_k\qquad(3-7-23)$$

其中 $\underset{\sim}{\Lambda}_k$ 是以 B_k 体固有频率平方为主元的对角阵，U_k 中第二项表示关节弹性 K_k 引起的应变能. 这样，系统的 Lagrange 函数为

$$L=\sum_k(T_k-U_k)\qquad(3-7-24)$$

再利用 Lagrange 第二类方程即可求得所要求的多柔体链系统动力学方程.

另外，利用典型体微元质量 dm 的速度 $\vec{v}_k$，在略去非线性项，即(3-7-10)的最后一项后，可以比照得出 dm 的虚位移 $\delta\vec{R}_k$ 或虚速度 $\delta\vec{v}_k$，分别为

$$\delta\vec{R}_k=\delta\vec{X}+\sum_j H_2(j-k)[-\vec{l}_j\times\delta\vec{\psi}_j+\vec{\Delta}_j]+\delta\vec{\psi}_k\times\vec{\rho}_k+\delta\vec{u}_k\qquad(3-7-25)$$

$$\delta\vec{v}_k=\delta\dot{\vec{X}}+\sum_j H_2(j-k)(-\vec{l}_j\times\delta\vec{\omega}_j+\delta\dot{\vec{\Delta}}_p)+\delta\vec{\Omega}_k\times\vec{\rho}_k+\delta\dot{\vec{u}}_k\qquad(3-7-26)$$

它们连同(3-7-18)的关于 dm 的加速度 $\vec{a}_k$ 的表达式可以分别求出虚功方程中所需的惯性力虚功，和 Kane 方程中所需的广义惯性力.

再参考(3-7-23)的应变能表达式可以给出虚功方程所需的任意体 B_k 的虚应变能

$$\delta U_k=\delta\underset{\sim}{\tau}_k^T\underset{\sim}{\Lambda}_k\underset{\sim}{\tau}_k+\delta\underset{\sim}{\psi}_k^T\underset{\sim}{K}_k\underset{\sim}{\psi}_k\qquad(3-7-27)$$

和 Kane 方程所需的任意体 B_k 的广义的内力虚功率

$$\delta P_{Nk}=-\delta\dot{\underset{\sim}{\tau}}_k^T\underset{\sim}{\Lambda}_k\underset{\sim}{\tau}_k-\delta\dot{\underset{\sim}{\psi}}_k^T\underset{\sim}{K}_k\underset{\sim}{\psi}_k\qquad(3-7-28)$$

然后可以分别根据虚功方程或 Kane 方程求出所要的多柔体链系统的动力学方程.

基于同样假设(弹性位移是线性小位移)，和选取相同的广义坐标 $\underset{\sim}{q}$，见(3-7-20)，用 Lagrange 第二类方程，虚功方程和 Kane 法可得相同结果：

$$\underset{\sim}{M}\dot{\underset{\sim}{Y}}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{q}=\underset{\sim}{Q}-\underset{\sim}{Q}_N\qquad(3-7-29)$$

其中广义质量阵 M 见(3－7－30)式，广义刚阵 K 见(3－7－31)，Q_N 见(3－7－32)式.

$$
M=\begin{bmatrix}
m_0\underline{I} & -\underline{A}_{c1}\underline{\tilde{S}}_1^{\cdot} & \underline{A}_{c1}\underline{P}_1^{\cdot} & -\underline{A}_{c2}\underline{\tilde{S}}_2^{\cdot} & \underline{A}_{c2}\underline{P}_2^{\cdot} & \cdots & \cdots & -\underline{A}_{ck}\underline{\tilde{S}}_k^{\cdot} & \underline{A}_{ck}\underline{P}_k^{\cdot} & \cdots & \cdots & -\underline{A}_{cN}\underline{\tilde{S}}_N^{\cdot} & \underline{A}_{cN}\underline{P}_N^{\cdot} \\
 & \underline{J}_{11} & \underline{H}_{11}^{\cdot} & \underline{J}_{12} & \underline{H}_{12}^{\cdot} & \cdots & \cdots & \underline{J}_{1k} & \underline{H}_{1k}^{\cdot} & \cdots & \cdots & \underline{J}_{1N} & \underline{H}_{1N}^{\cdot} \\
 & & \underline{I}+\underline{W}_{11} & \underline{V}_{12} & \underline{W}_{12} & \cdots & \cdots & \underline{V}_{1k} & \underline{W}_{1k} & & & \underline{V}_{1N} & \underline{W}_{1N} \\
 & & & \underline{J}_{22} & \underline{H}_{22}^{\cdot} & \cdots & \cdots & \underline{J}_{2k} & \underline{H}_{2k}^{\cdot} & & & \underline{J}_{2N} & \underline{H}_{2N}^{\cdot} \\
 & & & \underline{V}_{22} & \underline{I}+\underline{W}_{22} & \cdots & \cdots & \underline{V}_{2k} & \underline{W}_{2k} & & & \underline{V}_{2N} & \underline{W}_{2N} \\
 & & & & & \ddots & & & & & & & \\
 & & (下半对称) & & & & & \underline{J}_{kk} & \underline{H}_{kk}^{\cdot} & \cdots & \cdots & \underline{J}_{kN} & \underline{H}_{kN}^{\cdot} \\
 & & & & & & & \underline{V}_{kk} & \underline{I}+\underline{W}_{kk} & \cdots & \cdots & \underline{V}_{kk} & \underline{W}_{kN} \\
 & & & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & & & & \underline{J}_{NN} & \underline{H}_{NN}^{\cdot} \\
 & & & & & & & & & & & \underline{V}_{NN} & \underline{I}+\underline{W}_{NN}
\end{bmatrix}
\tag{3-7-30}
$$

$$
K=\mathrm{diag}\{0,0,\underline{\Lambda}_1,\underline{K}_2,\underline{\Lambda}_2,\cdots,\underline{K}_p,\underline{\Lambda}_p,\cdots,\underline{K}_N,\underline{\Lambda}_N\} \tag{3-7-31}
$$

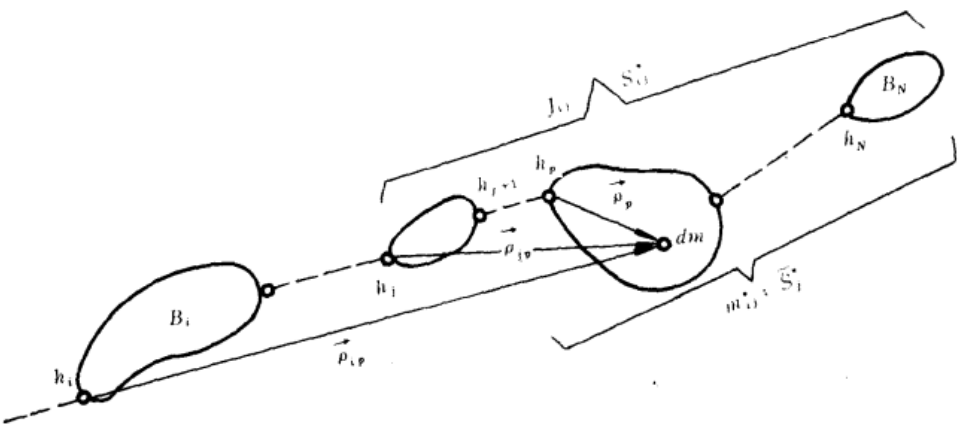


图 3－8　外接体示意图

M 内系数说明见表 3－2.

考查 M 阵可见，这个矩阵规模不小. 但这里还只考虑了一个链，如果系统有 C_C 条链，那么广义刚阵 M 的形式就如：

$$
Q_N=\begin{Bmatrix} Q_{XN} \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_{\varphi jN} \\ \\ \\ \\ Q_{\tau iN} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}
=\left\{\begin{array}{l}
\sum_j A_{ej}\{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j(\tilde{\underset{\sim}{l}}_j m_j^* + \tilde{\underset{\sim}{S}}_j)\underset{\sim}{\omega} - 2(\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j \underset{\sim}{D}_j m_j^* - \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j \underset{\sim}{P}_j)\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j \\
\quad + (\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j)(\underset{\sim}{D}_j m_j^* + \underset{\sim}{P}_j)\underset{\sim}{\tau}_j\} \\
\qquad\vdots \\
\qquad\vdots \\
-\sum_j \tilde{\underset{\sim}{S}}_{ij}^{*T}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega}_j + \sum_j H_1(j-i)(\underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{J}_{\omega j} + \tilde{\underset{\sim}{l}}_{ij}^T\underset{\sim}{A}_{ij}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{S}}_j)\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j \\
\quad + \sum_j \tilde{\underset{\sim}{S}}_{ij}^{*T}(2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_j + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_j) \\
\quad + \sum_j H_1(j-i)\{2(\tilde{\underset{\sim}{l}}_{ij}^T\underset{\sim}{A}_{ij}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j P_j + \underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{H}_{ij})\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j \\
\quad + (\tilde{\underset{\sim}{l}}_{ij}^T\underset{\sim}{A}_{ij}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{P}_j + \underset{\sim}{A}_{ij}\dot{\underset{\sim}{H}}_{aj})\underset{\sim}{\tau}_j + (\tilde{\underset{\sim}{l}}_{ij}^T\underset{\sim}{A}_{ij}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j + \underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{H}_{\omega j})\underset{\sim}{\tau}_j\} \\
\sum_j \underset{\sim}{D}_i^T\underset{\sim}{A}_{ij}m_{ij}^*\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega}_j + \sum_j H_2(j-i)\underset{\sim}{D}_i^T\underset{\sim}{A}_{ij}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{S}}_j\underset{\sim}{\omega}_j \\
\quad - \sum_j \underset{\sim}{D}_i^T\underset{\sim}{A}_{ij}m_j^*\{2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + (\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j)\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_j\} \\
\quad - \sum_j \underset{\sim}{D}_i^T\underset{\sim}{A}_{ij}\{2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + (\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j)\underset{\sim}{P}_j\underset{\sim}{\tau}_j\} \\
\quad + \sum_j H_2(j-i)\underset{\sim}{P}_i^T\underset{\sim}{A}_{ij}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega}_j + \underset{\sim}{H}_{ij}\underset{\sim}{\omega}_j \\
\quad - \sum_j H_2(j-i)\underset{\sim}{P}_i^T\underset{\sim}{A}_{ij}\{2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + (\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j)\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_j\} \\
\quad - \sum_j \underset{\sim}{B}_i^T\underset{\sim}{S}_{ij}^{*T}\{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{l}}_j\underset{\sim}{\omega}_j - H_2(j-i)\underset{\sim}{A}_{ij}[2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{D}_j\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j \\
\quad + (\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j)\underset{\sim}{D}_j\underset{\sim}{\tau}_j]\} + \sum_j H_1(j-i)\underset{\sim}{B}_i^T\{2(\tilde{\underset{\sim}{l}}_{ij}^T\underset{\sim}{A}_{ij}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j \\
\quad + \underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{H}_{\omega i})\dot{\underset{\sim}{\tau}}_j + (\tilde{\underset{\sim}{l}}_{ij}^T\underset{\sim}{A}_{ij}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{P}_j + \underset{\sim}{A}_{ij}\dot{\underset{\sim}{H}}_{\omega j})\underset{\sim}{\tau}_j + (\tilde{\underset{\sim}{l}}_{ij}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j \\
\quad + \underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{H}_{\omega\omega j})\underset{\sim}{\tau}_j\} \\
\qquad\vdots \\
\qquad\vdots
\end{array}\right\}
\tag{3-7-32}
$$

表 3－2

$\underset{\sim}{F}_{\omega j}=\int_j \underset{\sim}{T}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{T}_j dm$	B_j 体的陀螺阵
$\dot{\underset{\sim}{F}}_{\omega j}=\int_j \underset{\sim}{T}_j^T\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{T}_j dm$	
$\underset{\sim}{F}_{\omega\omega j}=\int_j \underset{\sim}{T}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,T_j dm$	B_j 体的离心刚阵
$\underset{\sim}{H}_j=\int_j \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j\underset{\sim}{T}_j dm$	B_j 体弹性位移对 h_j 铰的模态角动量系数
$\underset{\sim}{H}_{ij}=\tilde{\underset{\sim}{l}}_{ij}\underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{P}_j+\underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{H}_j$	B_j 体弹性位移对 h_j 铰的模态角动量系数　　$j>i$
$\underset{\sim}{H}_{ij}^*=\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_{ij}^{*T}\underset{\sim}{D}_j-\underset{\sim}{J}_{ij}^*\underset{\sim}{B}_j+\underset{\sim}{H}_{ij}$	
$\dot{\underset{\sim}{H}}_{\omega j}=\int_j \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_j\underset{\sim}{T}_j dm$	
$\underset{\sim}{H}_{\omega j}=\int_j \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{T}_j dm$	
$\underset{\sim}{H}_{\omega\omega j}=\int_j \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{T}_j dm$	
$\underset{\sim}{J}_j=\int_j \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_j dm$	B_j 体的对 h_j 铰的惯性张量
$\underset{\sim}{J}_{ij}=\sum_p H_1(p-i)H_1(p-j)\int\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{jp}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{ip}dm=\sum_{p=j}^N\int\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{jp}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{ip}dm$ $=\sum_{p=j}^N(\tilde{\underset{\sim}{l}}_{ip}\underset{\sim}{A}_{ij}\tilde{\underset{\sim}{l}}_{jp}m_p+\underset{\sim}{A}_{ip}\underset{\sim}{J}_p\underset{\sim}{A}_{pj}+\tilde{\underset{\sim}{l}}_{jp}^T\underset{\sim}{A}_{ip}\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_p\underset{\sim}{A}_{pj}+\underset{\sim}{A}_{ip}\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_p^T\underset{\sim}{A}_{pj}\tilde{\underset{\sim}{l}}_{jp})$	当 $j>i$ 时的 B_j 体及其外接诸体对 h_i 铰的交叉惯性张量
$\vec{l}_{ip}=\sum_{k=i}^{p}\vec{l}_k$	无弹性变形时 h_i 铰到 h_p 铰间距离，$p>i$.
$m_p=\int_p dm$	B_p 体的质量
$m_v=\sum_p m_p$	整个系统的质量
$m_j^*=\sum_p H_2(j-p)m_p=\sum_{p=j+1}^N m_p$	B_j 的外接体的总质量.
$m_{ij}^*=\sum_p H_2(i-p)H_2(j-p)m_p=\sum_{p=j+1}^N m_p$	当 $j>i$ 时，B_i 和 B_j 公有的外接体质量，$m_{ij}^*=m_j^*$.
$\underset{\sim}{P}_j=\int_i \underset{\sim}{T}_j dm$	B_j 体的弹性位移的模态动量系数
$\underset{\sim}{P}_j^*=\underset{\sim}{P}_j+m_j^*\underset{\sim}{D}_j-\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_j^*\underset{\sim}{B}_j$	B_j 为弹性体时的当量模态角动量系数
$\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_p=\int_p \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_p dm$	B_p 体对 h_p 铰的静矩 $\underset{\sim}{S}_p$ 的斜方阵
$\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_{jp}=\int_p \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{jp}dm=\tilde{\underset{\sim}{l}}_{jp}m_p+\underset{\sim}{A}_{jp}\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_p\underset{\sim}{A}_{pj}$	B_p 体对 h_j 铰静矩的斜方阵
$\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_j^*=\sum_p H_1(p-j)\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_{jp}$	B_j 体及其外接诸体的对 h_j 铰的静矩的斜方阵之和
$\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_{ij}^*=\sum_p H_1(p-j)H_2(i-p)\underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_{ip}=\sum_{p=j}^N\underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{\mathfrak{S}}_{ip}$, $j>i$	
$\vec{\rho}_{jp}=\vec{l}_{jp}+\vec{\rho}_p$	
以上诸量可参看图 3－8	
$\underset{\sim}{W}_{ij}=(\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{J}_{ij}^*\underset{\sim}{B}_j+\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{D}_j m_{ij}^*-\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{S}_{ij}^*\underset{\sim}{B}_j-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{S}_{ij}^*\underset{\sim}{D}_j+\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{P}_i+\underset{\sim}{H}_{ij}\underset{\sim}{B}_i$	$i<j$
$\underset{\sim}{V}_{ij}=\underset{\sim}{D}_j^T\underset{\sim}{S}_{ij}^*-\underset{\sim}{B}_j^T\underset{\sim}{J}_{ij}^*$	$j>i$

$$\underset{\sim}{M}=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{1C1} & M_{1C2} & \cdots & M_{1CC} \\ & \underset{\sim}{M}_{C1} & & & \\ & & \underset{\sim}{M}_{C2} & & \\ & & & \ddots & \\ & \text{下半} & & & \\ & \text{对称} & & & M_{CC} \end{bmatrix}$$

式(3－7－31)只是上式左上角粗线勾出部分．在这种情况下 $\underset{\sim}{M}$ 的规模更是大得不便计算．但这个方程有两个特点，还是对解题有利的．一是公式很规范，编制程序比较容易；二是各链之间只通过根体 B_1 耦合，反映在矩阵 $\underset{\sim}{M}$ 中就是右下角为对角阵．因此在解题时可先对每个链求解，最后再会合起来解根体上的广义位移．这是充分利用了矩阵分割的方便，以及部分矩阵是对角的优势．每一个链又可在不同的微机上进行，然后联网到负责计算根体广义位移的主要微机上，一面协调信息，一面进行计算．也就是说可以应用现代计算机技术中的并行处理的技术[41,8].

更进一步可以通过改进列式以提高运算效率，这就是采用递推型的动力学方程．

§8. 基于向量对的多柔体系统的有约束的动力学方程

在上节中我们推导了耦合型的动力学方程．这种方程各项系数物理概念清晰，公式规范．但是由于方程相互耦合，运算量比较大．

另一种类型的动力学方程是以单个体的动力学方程为基础，并用向量对的方式给出典型体 B_k 上的微元质量 dm 的位置向量和角速度向量．由此出发，结果之一是可以得出有约束的动力学方程．

采用向量对方法描述系统的运动学关系时，我们取出与 h_k 铰相邻的两体，并认定其外接体是我们研究的典型体 B_k．设图 3－9 所示为 h_k 铰的变形后的内接体 B_{k-1} 和外接体 B_k.

对于典型体 B_k，它的微元质量 dm 距离惯性参考系中心的位置向量 $\vec{R}_k$ 为

$$\vec{R}_k=\vec{X}_k+\vec{\rho}_k+\vec{u}_k \tag{3-8-1}$$

其中 $\vec{X}_k=\underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{X}_k$ 是 B_k 体的内铰 h_k 距离惯性参考系中心的位置向量，$\vec{\rho}_k=\underset{\sim}{b}_k^T\underset{\sim}{\rho}_k$ 是变形前 dm 到连体参考系 $\underset{\sim}{b}_k$ 原点(即 h_k 铰)的距离；$\vec{u}_k$ 是 dm 微元质量的弹性变形，一般以模态坐标 $\underset{\sim}{\tau}_k$ 表达为

$$\vec{u}_k=\underset{\sim}{b}_k^T\underset{\sim}{T}_k\underset{\sim}{\tau}_k \tag{3-8-2}$$

$\underset{\sim}{T}_k$ 是 B_k 体的固有模态阵，$\underset{\sim}{\tau}_k$ 是模态坐标阵．

又，B_k 体的内铰距惯性系中心的距离 $\vec{X}_k$ 又可由其内接体 B_{k-1} 的有关量表达为

$$\vec{X}_k=\vec{X}_{k-1}+\vec{l}_{k-1}+\vec{\Delta}_{k-1} \tag{3-8-3}$$

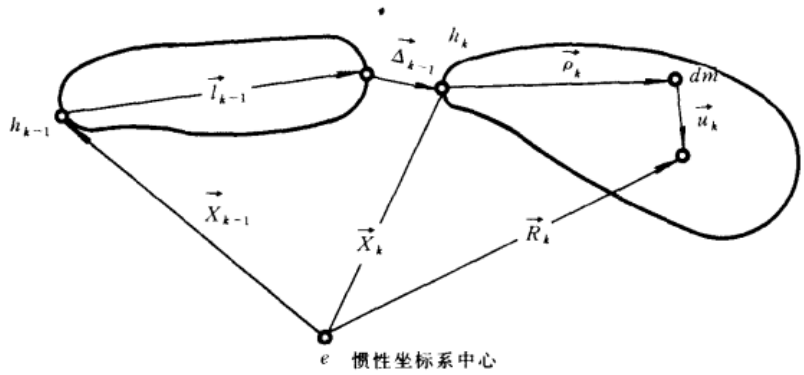


图 3-9 向量对关系

其中 $\vec{X}_{k-1}=\underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{X}_{k-1}$ 是 B_{k-1} 内铰 h_{k-1} 距惯性系中心的距离向量；$\vec{l}_{k-1}=\underset{\sim}{b}_{k-1}^T\underset{\sim}{l}_{k-1}$ 是 B_{k-1} 体的铰间向量，$\vec{\Delta}_{k-1}$ 是 B_{k-1} 体的弹性变形引起的在其外铰 h_k 上的位移，采用模态坐标 $\underset{\sim}{\tau}_{k-1}$ 表达时，有

$$\vec{\Delta}_{k-1}=\underset{\sim}{b}_{k-1}^T\underset{\sim}{D}_{k-1}\underset{\sim}{\tau}_{k-1} \tag{3-8-4}$$

再分别令 B_k 体和 B_{k-1} 体的绝对角速度（即相对于惯性系的角速度）分别为 $\vec{\omega}_k$ 和 $\vec{\omega}_{k-1}$，则显然有

$$\vec{\omega}_k=\vec{\omega}_{k-1}+\vec{\Omega}_k+\dot{\vec{\beta}}_{k-1} \tag{3-8-5}$$

式中 $\vec{\omega}_k=b^T\underset{\sim}{\omega}_k$，$\vec{\omega}_{k-1}=\underset{\sim}{b}_{k-1}^T\underset{\sim}{\omega}_{k-1}$；而 $\vec{\Omega}_k=\underset{\sim}{b}_k^T\underset{\sim}{\Omega}_k$ 是 B_k 体相对于其内接体 B_{k-1} 的相对角速度，至于 $\dot{\vec{\beta}}_{k-1}$ 则是由于 B_{k-1} 体的弹性角变形 $\vec{\beta}_{k-1}$ 引起的在其外铰 h_k 处的弹性角速度，它可用模态坐标 $\underset{\sim}{\tau}_{k-1}$ 表达为

$$\begin{aligned}\vec{\beta}_{k-1}&=\underset{\sim}{b}_{k-1}^T\underset{\sim}{B}_{k-1}\underset{\sim}{\tau}_{k-1}\\ \dot{\vec{\beta}}_{k-1}&=\underset{\sim}{b}_{k-1}^T\underset{\sim}{B}_{k-1}\dot{\underset{\sim}{\tau}}_{k-1}\end{aligned} \tag{3-8-6}$$

这样，在 B_k 典型体上的微元质量 dm 的速度 $\vec{v}_k$ 就是

$$\vec{v}_k=\frac{D\vec{R}_k}{dt}=\dot{\vec{X}}_k+\vec{\omega}_k\times\vec{\rho}_k+\dot{\vec{u}}_k+\vec{\omega}_k\times\vec{u}_k \tag{3-8-7}$$

微元质量的加速度 $\vec{a}_k$ 为

$$\begin{aligned}\vec{a}_k=\frac{D\vec{v}_k}{Dt}=\ddot{\vec{X}}_k+\dot{\vec{\omega}}_k\times\vec{\rho}_k+\ddot{\vec{u}}_k+\{&\dot{\vec{\omega}}_k\times\vec{u}_k+2\vec{\omega}_k\times\dot{\vec{u}}_k\\&+\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{\rho}_k)+\vec{\omega}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{u}_k)\}\end{aligned} \tag{3-8-8}$$

微元质量的虚位移 $\delta\vec{R}_k$ 就是

$$\delta\vec{R}_k=\delta\vec{X}_k+\delta\vec{\varphi}_k\times\vec{\rho}_k+\delta\vec{u}_k \tag{3-8-9}$$

其中 $\vec{\varphi}_k$ 是与 $\vec{\omega}_k$ 对应的角位移，一般讲是个伪坐标.

由(3－8－8)和(3－8－9)可以求出 B_k 体的惯性力虚功

$$\delta W_{Ik} = -\int_k \delta \vec{R}_k \cdot \vec{a}_k dm$$

取广义位移为

$$\underset{\sim}{Z}_k^T = (\underset{\sim}{X}_k^T, \underset{\sim}{\varphi}_k^T, \underset{\sim}{\tau}_k^T) \tag{3-8-10}$$

按照§3中的计算步骤可以容易求得

$$\delta W_{Ik} = \delta \underset{\sim}{Z}_k^T (\underset{\sim}{M}_k \dot{\underset{\sim}{Y}}_k + \underset{\sim}{Q}_{Nk}) \tag{3-8-11}$$

另外，我们还很容易得到 B_k 典型体的虚应变能为

$$\delta U_k = \delta \underset{\sim}{\tau}_k^T \underset{\sim}{\Lambda}_k \underset{\sim}{\tau}_k + \delta \underset{\sim}{\varphi}_k^T \underset{\sim}{K}_k \underset{\sim}{\varphi}_k = \delta \underset{\sim}{Z}_k^T \underset{\sim}{Q}_{Tk} \tag{3-8-12}$$

其中 $\underset{\sim}{\tau}_k$ 是 B_k 体的模态坐标阵；$\dot{\underset{\sim}{\varphi}}_k = \underset{\sim}{\Omega}_k$，$\underset{\sim}{\varphi}_k$ 是对应于 B_k 相对其内接体的相对角速度 $\underset{\sim}{\Omega}_k$ 的伪坐标；$\underset{\sim}{Q}_{Tk}$ 是弹性力

$$\underset{\sim}{Q}_{Tk}^T = (0, (\underset{\sim}{K}_k \underset{\sim}{\varphi}_k)^T, (\underset{\sim}{\Lambda}_k \underset{\sim}{\tau}_k)^T)^T \tag{3-8-13}$$

至于外力虚功，我们照常写作

$$\delta W_{ek} = \delta \underset{\sim}{Z}_k^T \underset{\sim}{Q}_{ek} \tag{3-8-14}$$

把(3－8－11)，(3－8－12)和(3－8－4)代入系统总虚功为零的公式

$$\delta W = \sum_{k=1}^{N} (\delta W_{Ik} + \delta W_{ek} - \delta U_k) = 0$$

则有

$$\sum_{k=1}^{N} [\delta \underset{\sim}{Z}_k^T (\underset{\sim}{M}_k \dot{\underset{\sim}{Y}}_k + \underset{\sim}{Q}_{Tk} - \underset{\sim}{Q}_{ek} + \underset{\sim}{Q}_{Nk})] = 0 \tag{3-8-15}$$

其中 $\underset{\sim}{Y}_k$ 是广义速度

$$\underset{\sim}{Y}_k^T = (\dot{\underset{\sim}{X}}_k^T, \underset{\sim}{\omega}_k^T, \dot{\underset{\sim}{\tau}}_k^T) \tag{3-8-16}$$

$\underset{\sim}{M}_k$ 是

$$\underset{\sim}{M}_k = \begin{bmatrix} m_k \underset{\sim}{I} & -\underset{\sim}{A}_{ek} \underset{\sim}{\tilde{S}}_k & \underset{\sim}{A}_{ek} \underset{\sim}{P}_k \\ -\underset{\sim}{\tilde{S}}_k^T \underset{\sim}{A}_{ke} & \underset{\sim}{J}_k & \underset{\sim}{H}_k \\ \underset{\sim}{P}_k^T \underset{\sim}{A}_{ke} & \underset{\sim}{H}_k^T & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} \tag{3-8-17}$$

各系数含义见表3－1，$\underset{\sim}{I}$ 是单位阵，$\underset{\sim}{Q}_{Nk}$ 则是

$$\underset{\sim}{Q}_{Nk} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{ek} (\dot{\underset{\sim}{\omega}}_k \underset{\sim}{P}_k \underset{\sim}{\tau}_k + 2\underset{\sim}{\omega}_k \underset{\sim}{P}_k \dot{\underset{\sim}{\tau}}_k + \underset{\sim}{\omega}_k \underset{\sim}{\tilde{S}}_k \underset{\sim}{\omega}_k + \underset{\sim}{\omega}_k \underset{\sim}{\omega}_k \underset{\sim}{P}_k \underset{\sim}{\tau}) \\ \dot{\underset{\sim}{H}}_{ok} \underset{\sim}{\tau}_k + 2\underset{\sim}{H}_{ok} \dot{\underset{\sim}{\tau}}_k + \underset{\sim}{J}_{ok} \underset{\sim}{\omega}_k + \underset{\sim}{H}_{\omega ok} \underset{\sim}{\tau}_k \\ \dot{\underset{\sim}{F}}_{ok} \underset{\sim}{\tau}_k + 2\underset{\sim}{F}_{ok} \dot{\underset{\sim}{\tau}}_k + \underset{\sim}{H}_{ok}^T \underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{F}_{\omega ok} \underset{\sim}{\tau}_k \end{bmatrix} \tag{3-8-18}$$

(3－8－15)的总和为零，但小括号内项(……)并不一定为零，这是因为就系统的全部诸体来说，各体的 $\delta \underset{\sim}{Z}_k$ 并不是独立的，这里存在着约束方程(3－8－3)和(3－8－5).

处理这个问题的方法之一是利用 Lagrange 乘子法，像 Bodley 等人所做[10]. 仿照 Lagrange 乘子法还可得出同样适用于虚功方程和 Kane 方程的待定乘子法.

§9. 用待定乘子法建立多柔体系统动力学方程

在前面几节里，我们推导了拓扑关系比较简单的多柔体簇系统动力学方程和多柔体链系统动力学．这里建立动力学方程的思路是：先按向量链的形式给出各体间的运动学描述．这个描述也可称为是系统的运动学约束方程．在建立典型体的动力学方程时，先利用这些向量链形式的约束方程，消去了部分未知量．在这里我们保留了体间相对角速度 $\underset{\sim}{\Omega}_j$ 作为广义速度，而消去了体相对于惯性参考系的绝对角速度 $\underset{\sim}{\omega}_j$．最后建立了系统的耦合型的动力学方程．但由 §7 推导出的多柔体链系统动力学方程可知，方程的各项系数实在是繁琐复杂．对于拓扑关系更复杂的多柔体树系统，循着这样思路建立耦合型动力学方程，显然其系数的表达式将更为复杂．所以这不是一个好办法，需要另辟门径．

在上一节我们不采用向量链的形式，而采用向量对的形式建立了各体间的运动学描述，就是说得出了向量对形式的运动学方程，并将 B_k 体的绝对角速度 $\underset{\sim}{\omega}_k$ 取为广义速度．这样，得出广义速度为（见(3－8－16)式）

$$\underset{\sim}{Y}_k^T = (\dot{\underset{\sim}{X}}_k^T, \underset{\sim}{\omega}_k^T, \dot{\underset{\sim}{\tau}}_k^T) \tag{3-9-1}$$

而令 B_k．体的广义位移为（见(3－8－10)）

$$\underset{\sim}{Z}_k^T = (\underset{\sim}{X}_k^T, \underset{\sim}{\varphi}_k^T, \underset{\sim}{\tau}_k^T) \tag{3-9-2}$$

$\underset{\sim}{X}_k$ 是 B_k 体的内铰 h_k 距惯性参考系中心的距离，$\underset{\sim}{\tau}_k$ 是 B_k 体的模态坐标，$\underset{\sim}{\omega}_k$ 是 B_k 体相对于惯性参考系的绝对角速度，$\underset{\sim}{\varphi}_k$ 是与绝对角速度 $\underset{\sim}{\omega}_k$ 对应的伪坐标．并利用虚功原理，推出了总虚功为零的方程为（见(3－8－15)）

$$\sum_{k=1}^{N} [\delta \underset{\sim}{Z}_k^T (\underset{\sim}{M}_k \dot{\underset{\sim}{Y}}_k + \underset{\sim}{Q}_{Tk} - \underset{\sim}{Q}_{ek} + \underset{\sim}{Q}_{Nk})] = 0 \tag{3-9-3}$$

在这里 $\delta \underset{\sim}{Z}_k$ 之间不是相互独立的．在上一节末还指出和(3－8－15) 动力学方程一起还有约束条件．这样，我们把系统当作一个有约束条件的系统（简称为约束系统）来处理．这样作法也有几个方便之处．首先，(3－8－15) 式很简洁，其次有关的运动学约束条件相对讲比较规范化，列式也简单，参看(3－8－5) 方程和(3－8－3) 方程．而且需要的信息也很少，只要知道每个铰上的内接体的信息就可以了．在采用第二章叙述的规则编号法后，只要有关连矩阵 $\underset{\sim}{S}$ 或体间关系数组的前两列就可以了．而在采用向量链形式给出这些约束条件时，就还需要通路矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 或体间关系数组的全部信息．其次，不仅是多柔体树系统，而且有回路的多柔体系统都可以作为约束系统处理．另外，在分析力学中有 Lagrange 第一类方程（或称为 Lagrange 乘子法）可以很方便地处理这种约束系统．

关于 Lagrange 第一类方程（或 Lagrange 乘子法）在分析力学书籍中都有详细讲述，这里不详细推导．我们想在本章 §2 讨论过的 Lagrange 乘子的物理意义的基础上把它推广到虚功方程和 Kane 方程上去[81]．因此，本节标题为用待定乘子法（包括具有待定乘子的虚功方程和具有待定乘子的 Kane 方程）建立多柔体系统动力学方程．

Lagrange 第一类方程的形式为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j A_{jk} \qquad k = 1, 2, \cdots, N \tag{3-9-4}$$

其中 λ_j 是 Lagrange 乘子．A_{jk}是当约束条件取导数形式时的系数，这里约束条件为

$$\sum_{k=1}^{N} A_{jk}\dot{q}_k + B_j = 0, \qquad j = 1,2,\cdots,m \tag{3-9-5}$$

q_k 和 $\dot{q}_k$ 分别是广义坐标及其时间导数，N 是广义坐标的数目，m 是约束条件的数目．当(3－9－5)式可以积分时，则有

$$\varphi_j = \varphi_j(q_1,\cdots,q_N,t), \qquad j = 1,2,\cdots,m \tag{3-9-6}$$

这时显然有

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = 0 \tag{3-9-7}$$

即

$$A_{jk} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \quad 和 \quad B_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \tag{3-9-8}$$

φ_j 表示一个在 N 维位形空间中的超曲面；A_{jk}则是该曲面的外法线在 q_k 方向的投影．由本章§2 中(3－2－8)式可知

$$\underset{\sim}{f_c^j} = \lambda_j \underset{\sim}{A_j} \tag{3-9-9}$$

就是说，对于理想约束 j，其约束反力 $\underset{\sim}{f_c^j}$ 是沿着外法线方向的；这里 $\underset{\sim}{A_j^T} = (A_{j1},\cdots,A_{jN})$．因此 Lagrange 乘子的物理意义就是约束力 f_c^j 的“大小”的表征．上式还可写作

$$f_{ck}^j = \lambda_j A_{jk} \tag{3-9-10}$$

f_{ck}^j的含义就是理想约束 j 的约束力 f_c^j 在广义位移 q_k 方向的投影．

再讨论(3－9－4)式．我们知道不计入上式右端第二项时

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial L}{\partial q_k} - Q_k = 0 \qquad k = 1,2,\cdots,N$$

表示的是惯性力、内力(弹性力)和主动力在 q_k 方向的平衡，其右端即为(3－8－15)的(……)内项．因而(3－9－4)式则是表示惯性力、内力(弹性力)和外力以及诸约束反力在广义位移 q_k 方向的平衡条件．在应用(3－9－4)式时，$(q_1,\cdots,q_N)$ 这 N 个广义位移全被视为独立的(尽管它们因为有约束条件彼此不全独立)，另外 λ_j 也是待求的未知量(因此又称为待定乘子)．这样共有$(N+m)$个未知量．联立解(3－9－4)的平衡方程和(3－9－5)或(3－9－6)的约束条件(总共有 $N+m$ 个方程)可以定出全部未知量 $q_1,\cdots,q_N$ 和 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$．

把待定乘子(Lagrange 乘子)推广到虚功方程或 Kane 方程，并不困难．

在讨论带有待定系数的虚功原理时，只要我们注意在虚功方程中，除去惯性力虚功 δW_I，虚应变能 δU 和外力虚功 δW_e 之外，还有约束力的虚功 δW_c．这样系统的总虚功就是

$$\delta W = \delta W_I + \delta W_e - \delta U + \delta W_c = 0 \tag{3-9-11}$$

再注意由(3－9－10)已知，第 j 个约束反力在广义位移 q_k 方向的投影是 f_{ck}^j，这样系统的全部约束的约束力的虚功 δW_c 就是

$$\begin{aligned}\delta W_c &= \sum_{j=1}^{m}\Big[\sum_{p=1}^{N}(f_{cp}^j \delta q_p)\Big] = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{N}\lambda_j A_{jp}\delta q_p \\ &= \sum_{p=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j A_{jp}\Big)\delta q_p\end{aligned} \tag{3-9-12}$$

由于前已证明，对于理想约束 δW_c 恒为零．因此，δW_c 的加入并不改变系统的总虚功 δW 恒为零的特点．不过这时 δq_p 可被看作是彼此独立的．

将(3－9－12)代入(3－9－11)得

$$\delta W = \delta W_I + \delta W_e - \delta U + \sum_{p=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j A_{jp}\Big)\delta q_p \qquad (3-9-13)$$

这就是具有待定乘子(Lagrange 乘子) λ_j 的虚功方程．

如果我们仍取广义速度 $\underset{\sim}{Y}$ 如(3－8－16)式，并约定 $\underset{\sim}{q}^T=(q_1,\cdots,q_k,\cdots,q_N)$ 的元素与 $\underset{\sim}{Z}$ 的元素一致，即 $\underset{\sim}{q}^T=(\underset{\sim}{Z}_1^T,\cdots,\underset{\sim}{Z}_k^T,\cdots,\underset{\sim}{Z}_N^T)$．再注意由本章 §8 已知，由(3－9－13)的前三项可以得出(3－8－15)，将(3－8－15)代入(3－9－13)，可得

$$\sum_{k=1}^{N}\delta\underset{\sim}{Z}_k^T(\underset{\sim}{M}_k\dot{\underset{\sim}{Y}}_k+\underset{\sim}{Q}_{Tk}-\underset{\sim}{Q}_{ek}+\underset{\sim}{Q}_{Nk}-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j A_{jk})=0 \qquad (3-9-14)$$

这就是矩阵形式的带有待定乘子 λ_j 的虚功方程的表达式．这里 N 是系统的体的数目．注意现在 $\delta\underset{\sim}{Z}_k$ 可看作是独立的任意变分，因而上式恒为零的条件是括号(…)内项恒为零，即

$$\underset{\sim}{M}_k\dot{\underset{\sim}{Y}}_k+\underset{\sim}{Q}_{Tk}-\underset{\sim}{Q}_{ek}+\underset{\sim}{Q}_{Nk}-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j A_{jk}=0,\qquad k=1,2,\cdots,N \qquad (3-9-15)$$

其中 $\underset{\sim}{M}_k$ 是惯性矩阵，见(3－8－17)；$\underset{\sim}{Q}_{Tk}$ 是广义弹性力，见(3－8－13)；$\underset{\sim}{Q}_{Nk}$ 是非线性项的当量力，见(3－8－18)式；$\underset{\sim}{Q}_{ek}$ 是广义主动力．这里的未知量是 $\underset{\sim}{q}^T=(\underset{\sim}{Z}_1^T,\cdots,\underset{\sim}{Z}_N^T)$ 及 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,m)$，共 $N+m$ 个．注意矩阵形式的(3－9－15)的数目与 q 的阶数 N 相符，即有 N 个方程；连同 m 个约束条件(3－9－6)或(3－9－7)共计 $N+m$ 个条件，可以解出 $N+m$ 个未知量 $\underset{\sim}{Z}_k(k=1,2,\cdots,N)$ 和 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,m)$．

至于约束条件则形如(3－8－3)和(3－8－5)．不过这里右侧的下标不一定是 $k-1$，而是由右端的 k 根据体间关系数组提供的内接体信息确定．

最后，再讨论具有待定乘子的 Kane 方程[81]．

在本章§5 中曾给出

$$\sum_{k=1}^{N}(f_{ik}^{*}+f_{ek}^{*}+f_{Nk}^{*})W_k=0 \qquad (3-9-16)$$

当 W_k 是独立的任意的偏速度时，从上式恒为零的条件即可导出 Kane 方程(3－5－20)．

如果对于 W_k 也有附加的约束条件，其形式为

$$\sum_{k=1}^{N}A_{jk}W_k+B_j=0,\qquad j=1,2,\cdots,m \qquad (3-9-17)$$

这时由(3－9－16)就不能直接导出(3－5－20)的 Kane 方程．但是(3－9－17)式仍意味着由 W_k 组成的空间的约束表面，而 A_{jk} 也仍意味着该约束表面的法线向量的分量．因此，第 j 个约束的约束反力在 W_k 方向的分量仍可写作

$$f_{ik}^{j}=\lambda_j A_{jk}$$

我们还注意(3－9－16)是由虚功率得出，所以可在(3－9－16)式中再加入由约束力引起的虚功率

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N}f_{ik}^{j}W_k=\sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j A_{jk}\Big)W_k=\sum_{k=1}^{N}f_{ik}^{*}W_k$$

由此可见广义约束力为

$$f_{ck}^{*} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j A_{jk} \tag{3-9-18}$$

将(3-9-18)代入(3-9-16)得到带有待定系数的 Kane 方程：

$$f_{Ik}^{*} + f_{ck}^{*} + f_{Nk}^{*} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j A_{jk} = 0 \tag{3-9-19}$$

注意前面曾讨论过的关于 Kane 方程，虚功方程和 Lagrange 方程的殊途同归的特点，由(3-9-19)的带有待定乘子的 Kane 方程也可得出如(3-9-15)的最终方程．它连同约束方程一起，可解出$(m+N)$个未知量．

用 Lgrange 乘子法得出的方程比耦合型方程简洁一些，但是求解的未知量的数目增多了．因此，近年来在多柔体系统动力学的文献中都在研究如何减少约束系统的方程数，这些我们将在第六章中讨论．

§10. 多柔体系统动力学方程的符号推导

在我们建立多柔体系统动力学时，有大量的公式推导工作，包括向量的点积、叉积、求导、多项式展开和系数整理等工作．这些工作十分繁琐，由手工完成容易出错．如果能用计算机去作，自然十分理想．由计算机完成这些工作称为符号推导(Symbolic Derivation 或 Symbolic Manipulation)[66,67,51]．

在进行符号推导时，有一些专用的语言，像 MACSYM，FORMAC 等等．我们以 FORMAC 为例，介绍符号推导的一些基本概念和特点．

在 FORMAC 中有自己的一些赋值语句，对多柔体系统动力学推导很有用处．这种语句以 LET 开头．例如需将 $C(A+B)^3$ 赋给一个变量 X1，用 FORMAC 语句就写作

LET(X1=C*(A+B)**3)

如果想把 X1 中的 $C(A+B)^3$ 展开，则有语句

LET(X2=EXPANDX1)

它的执行结果就是把 $C(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)$ 赋给 X2．在推导多柔体系统动力学方程时，我们还常遇到这样的工作，即把与虚位移 C 有关的项全取出来，以建立有关的动力学方程．这样的工作可用以下的 FORMAC 语句实行

LET(X3 = COEFF(X2,C))

执行结果就是把 X2 中的表达式中的与 C 有关的系数即 $(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)$ 赋予 X3.

利用 FORMAC 可以对 Kane 方程进行符号推导．[51]中考虑了一个由两个刚体 B 和 R 组成的多体系统的例子，它们的质量分别是 m_B 和 m_R，加速分别是 $\vec{a}_B$ 和 $\vec{a}_R$.

Kane 方程是

$$f_{Ej}^{*} + f_{Ij}^{*} = 0 \tag{3-10-1}$$

其中 f_{Ej}^{*} 是对应于广义速度 W_j 的广义外力，f_{Ij}^{*} 是对应于广义速度 W_j 的广义惯性力，其中

$$f_{Ij}^{*} = -m_B\vec{a}_B \cdot \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial W_j} - m_R\vec{a}_R \cdot \frac{\partial \vec{v}_R}{\partial W_j} \tag{3-10-2}$$

$$f_{Ej} = \vec{f}_B \cdot \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial W_j} + \vec{f}_R \cdot \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial W_j} \tag{3-10-3}$$

式中的 W_j 是偏速度．最终方程为

$$X\dot{W}=Y \tag{3-10-4}$$

为了编程方便，将(3-10-1)式改写一下赋给数组 $E(j)$：

$$E(j)=f_{Ej}^{*}+f_{1j}^{*}=(\vec{f}_B-m_B\vec{a}_B)\cdot\frac{\partial\vec{v}_B}{\partial W_j}+(\vec{f}_R-m_R\vec{a}_R)\cdot\frac{\partial\vec{v}_B}{\partial W_j} \tag{3-10-5}$$

再将 $E(j)$ 展开，与 W_k 对应的系数就是(3-10-4)式中的 X 矩阵的元素 X_{jk}；其余的就是(3-10-4)式中右端 Y 矩阵的元素 $Y(j)$.

这些工作可以用FORMAC语句做符号推导．

令在先行推导中已求得 $\vec{v}_B,\vec{v}_R$ 和 $\vec{a}_B,\vec{a}_R$ 分别存在三维数组 VB,VR,AB,AR 之中．又令 $\vec{f}_B$ 和 $\vec{f}_R$ 分别在 FB 和 FR 中，并假定有7个偏速度．

这样，对于(3-10-5)式有用FORMAC语句编写的程序段如下：

```
DO j=1 TO 7;        LET(j="j");
LET(E(j)=0);
DO k=1,3;           LET(k="k");
LET(E(j)=E(j)+(FB(k)-AB(k)*DERIV(VB(k),Wj)
          +(FR(k)-AR(k))*DERIV(VR(k),Wj);
END;
```

上式中的DERIV(VB(k),Wj)就是进行 $\partial\vec{v}_B(K)/\partial W_j$ 的求导数的运算．$k=1,2,3$ 表示 $\vec{v}_B$ 有三个坐标分量；$j=1$ TO 7 表示有7个偏速度．

有了 $E(j)$，下一步就是将 $E(j)$ 式展开，并且整理，将对应于 W_k 的系数项作为 X_{jk}．它的FORMAC语句的程序段是：

```
DO j=1 TO 7;        LET(j="j");
LET(XE(j)=EXPAND(E(j));
DO k=1 TO 3;        LET(k="k");
LET(X(j,k)=COEFF(XE(j),W(k));
END;
```

再求广义力项 $\underset{\sim}{Y}$，它显然是 $E(j)$ 里面除去与广义速度有关的项．因此，可用以下程序实现：

```
DO j=1 TO 7;        LET(j="j");
LET(Y(j)=-REPLACE(E(j),W(1),0,W(2),0,W(3),0,…,W(7),0);
END;
```

它的意思是，在 $E(j)$ 中以零代替其中的 $W(1),W(2),\cdots,W(7)$；再将结果送给 $Y(j)$.

第四章　多柔体系统动力学模型的降阶准则

§1. 引　　言

多柔体系统动力学的离散化模型是具有很多自由度的动力学方程，或者说是有很高阶数的动力学方程. 建立了多柔体系统动力学模型后，其后继工作有两大方面. 一方面是求解系统的动力响应，这项工作的目的是进行系统的动力学仿真，或是对控制系统的品质和稳定性作时域内的评定. 另一方面的后继工作是为控制系统的设计（又称为控制系统的综合）提供设计模型. 但无论对于哪一类后继工作，这样高阶的动力学方程都是不适用的. 模型阶数过高在求动力响应时会遇到很大的数值困难，这是不言而喻的，至于谈到作为控制系统设计用的模型，这样高阶的动力学模型更是很难应用的. 目前的控制设计技术，即使是所谓的多变量控制设计技术，所能处理的变量数目仍是很有限的，远远低于多柔体系统动力学模型的阶数. 因此由应用的角度考虑，动力学模型的降阶问题是一个非常重要而有实际意义的问题.

在混合坐标法中，变量（或坐标）有两大类. 一类是反映系统的整体的刚体位移或系统相邻部件（体）之间的相对刚体位移的变量；一类是系统内各柔性部件（柔性体）的弹性位移变量. 前者数量相对较少，而且一般常是需要加以观察和控制的量，在模型中需予保留. 对于弹性体的弹性位移就不同了，它的自由度数目较多，对于一些大型柔性附件其数目甚至很大，是造成模型高阶的主要原因. 因此，考虑降阶时，主要着眼于这些弹性位移的自由度数目的减小.

前面在推导多柔体系统动力学方程时，我们曾经采用了模态叠加法. 就是用系统的或系统的某个部件（某个体）的固有模态的线性组合来表示系统的或系统的某个部件的弹性位移. 这时，多柔体系统动力学方程中的这一部分变量就不再是弹性位移变量，而是对应的模态坐标. 对于一个有 n 阶自由度的弹性部件，它有 n 个固有模态，对应的有 n 个模态坐标用来完全地表达它的弹性位移. 为了降阶. 可取 m 个固有模态来近似地表达该弹性位移，$m<n$. 这样模态坐标数目 m 将可能小于甚至远小于弹性位移的坐标数 n. 降阶方法，在一些文献中又称之为模态降阶方法，因为它主要是针对于模态坐标进行的降阶；或者说它是在以模态向量作为基向量的模态空间内进行降阶的.

模态降阶法在结构动力学中早有应用. 计算受迫振动响应的模态展开法是一个例子，计算大型复杂结构的模态综合法则又是一个例子.

在模态展开法中，令

$$\underset{\sim}{X}=\sum_{i}^{m}\underset{\sim}{T}_i\tau_i$$

计算时由低阶开始，顺序令 $m=1$，2，…，直到前后两次求出的响应值相当接近，就是说直到更高阶的模态坐标 τ_{m+1} 等对响应 $\underset{\sim}{X}$ 的贡献很小时为止. 由物理概念上我们还知道，第 k 阶模态坐标 τ_k 对响应 $\underset{\sim}{X}$ 的贡献还取决于外力的诸谐和分量（Harmonic）的频率（驱

动频率）是否与系统的对应的固有频率 ω_k 接近. 由此得出一个模态截断的准则：选取模态坐标时，应由最低阶开始，直到其对应的固有频率超过外力的谐和分量的最高频率.

在多柔体系统动力学模型的降阶问题中，降阶问题是与控制系统设计密切有关的. 在本章中，我们主要介绍以下几个降阶准则：惯性完备性准则、模态价值分析准则和内部平衡降阶准则. 除了这些降阶准则以外，还有一些作为大系统考虑的降阶方法，如集结法等. 有兴趣的读者可以参看文献 [119]，那里有较系统的总结.

在动力学问题研究的文献中，模型降阶问题一直是一个重要的热点. 这里涉及的问题事实上是两个不全相同的问题. 一个是与求特征值问题有关的，即研究一个低阶系统，由它可以求得与原系统一致的（当然是前若干阶的）特征值和特征向量. 另一个问题是在已求得的特征值和特征向量中选取哪些来作模态展开以构成动力学模型. 本章讨论的是后一方面问题.

§2. 惯性完备性准则[33,34]

惯性完备性准则是建立在模态动量系数 $\underset{\sim}{P}$ 和模态角动量系数 $\underset{\sim}{H}$ 的特性上的.

由第二章的（2－4－1）式我们知道模态动量系数 $\vec{\underset{\sim}{P}}$ 为

$$\vec{\underset{\sim}{P}} = \int_B \vec{\underset{\sim}{T}}\, dm \tag{4-2-1}$$

模态角动量系数 $\vec{\underset{\sim}{H}}$ 为

$$\vec{\underset{\sim}{H}} = \int_B \vec{\rho} \times \vec{\underset{\sim}{T}}\, dm \tag{4-2-2}$$

式中 dm 是体 B 内任一点的微元质量，$\vec{\rho}$ 是该点距坐标原点的距离向量，$\vec{\underset{\sim}{T}}$ 是该点模态阵. 这些向量都在连体基 $\underset{\sim}{b}$ 内定义. 就是说

$$\vec{\rho} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\rho}, \qquad \vec{\underset{\sim}{P}} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{P}, \qquad \vec{\underset{\sim}{H}} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{H} \qquad \text{和} \qquad \vec{\underset{\sim}{T}} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{T} \tag{4-2-3}$$

这样(4－2－1)和(4－2－2)就又可以改写成矩阵形式(参看第三章表 3－1)，

$$\underset{\sim}{P} = \int_B \underset{\sim}{T}\, dm \tag{4-2-4}$$

$$\underset{\sim}{H} = \int_B \underset{\sim}{\tilde{\rho}}\, \underset{\sim}{T}\, dm \tag{4-2-5}$$

$$\underset{\sim}{P} = (\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2, \cdots, \underset{\sim}{P}_k, \cdots, \underset{\sim}{P}_r) \tag{4-2-6}$$

$$\underset{\sim}{H} = (\underset{\sim}{H}_1, \underset{\sim}{H}_2, \cdots, \underset{\sim}{H}_k, \cdots, \underset{\sim}{H}_r) \tag{4-2-7}$$

其中 $\underset{\sim}{P}_k$ 和 $\underset{\sim}{H}_k$ 分别为与 k 阶模态 $\underset{\sim}{T}_k$ 对应的模态动量系数和模态角动量系数. 这三者都是(3×1)列阵；$\underset{\sim}{P}$，$\underset{\sim}{H}$ 都是(3×r)矩阵.

Hughes 曾证明[33]，模态动量系数与模态角动量系数有如下特点：当 $r \to \infty$ 时，有

$$\underset{\sim}{P}\, \underset{\sim}{P}^T = \underset{\sim}{I}\, m \tag{4-2-8}$$

$$\underset{\sim}{H}\, \underset{\sim}{H}^T = \underset{\sim}{J} \tag{4-2-9}$$

考虑(4－2－6)和(4－2－7)式，上式还可记作

$$\underset{\sim}{P}\, \underset{\sim}{P}^T = \sum_{k=1}^{\infty} \underset{\sim}{P}_k \underset{\sim}{P}_k^T = \sum_{k=1}^{\infty} \underset{\sim}{I}\, m_k = \underset{\sim}{I} \sum_{k=1}^{\infty} m_k = \underset{\sim}{I}\, m \tag{4-2-10}$$

$$\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{H}^T=\sum_{k=1}^{\infty}\underset{\sim}{H}_k\underset{\sim}{H}_k^T=\sum_{k=1}^{\infty}\underset{\sim}{J}_k=\underset{\sim}{J} \tag{4-2-11}$$

式中 $r\to\infty$ 表示被考虑的是连续弹性体；$\underset{\sim}{I}$ 是(3×3)的单位阵；m 是系统的总质量；$\underset{\sim}{J}$ 是系统的惯性张量阵；m_k 和 $\underset{\sim}{J}_K$ 分别表示与第 k 阶模态对应的质量和惯性张量. 显然，当取 r 为有限值时，(4-2-10)和(4-2-11)两式近似成立.

为证明上述特点，需利用 Parsval 定理：倘若有一向量 $\vec{g}_i$，满足

$$\int_B \vec{g}_i\cdot\vec{g}_i dv<\infty$$

则可以用完备函数族 $\vec{\Phi}_j(j=1,2,\cdots)$，将之展开为

$$\vec{g}_i=\sum_{j=1}^{\infty}C_{ij}\vec{\Phi}_j$$

由于弹性体的固有模态 $\vec{T}_j(j=1,2,\cdots)$ 是一个完备的函数族，因而可令

$$\vec{\Phi}_j=\vec{T}_j$$

由此得

$$\vec{g}_i=\sum_{j=1}^{r}C_{ij}\vec{T}_j \tag{4-2-12}$$

这里取总和为有限多项 r，这是对 $\vec{g}_i$ 的近似表达. (4-2-12)可以用矩阵形式写作

$$\vec{g}_i=\underset{\sim}{\vec{T}}\,\underset{\sim}{C}_i^T \tag{4-2-13}$$

其中，$\underset{\sim}{\vec{T}}=[\vec{T}_1,\vec{T}_2,\cdots,\vec{T}_k,\cdots,\vec{T}_r]$ 是模态阵，$\underset{\sim}{C}_i=(C_{i1},\cdots,C_{ir})$ 为行阵，而 r 是模态阵中被保留的模态数. 当 $r\to\infty$ 时(4-2-12)为对 $\vec{g}_i$ 的精确表达，当 r 为有限值时(4-2-12)式则是近似表达. C_{ij} 称为 Fourier 系数，Fourier 系数由固有模态的正交规格化条件求出. 为此可将(4-2-12)式两侧先点乘 $\vec{T}_k$，再在 B 体内对微元质量积分：

$$\int_B\vec{g}_i\cdot\vec{T}_k dm=\int_B\Big(\sum_{j=1}^{r}C_{ij}\vec{T}_j\Big)\cdot\vec{T}_k dm=\sum_{j=1}^{r}C_{ij}\Big(\int_B\vec{T}_j\cdot\vec{T}_k dm\Big)$$

根据规格化正交条件(见附录 B 的 B-17 式)

$$\int_B\vec{T}_j\cdot\vec{T}_k dm=\delta_{jk}$$

其中 δ_{jk} 是 Kronecker 符号. 因为在 j 取值 1 到 r 的求总和中，只有第 k 项的 $\delta_{kk}=1$，这样上式变成

$$\int_B\vec{g}_i\cdot\vec{T}_k dm=\sum_{j=1}^{r}C_{ij}\delta_{jk}=C_{ik}$$

倘若令

$$\vec{g}_i=\underset{\sim}{b}^T g_i,\qquad \vec{T}_k=\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{T}_k,\qquad \underset{\sim}{T}=[\underset{\sim}{T}_1,\cdots,\underset{\sim}{T}_k,\cdots,\underset{\sim}{T}_r]$$

则有

$$\int_B g_i^T\underset{\sim}{T}\,dm=\underset{\sim}{C}_i \tag{4-2-14}$$

进一步令 $\underset{\sim}{\vec{G}}=(\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3)$，和 $\vec{G}=\underset{\sim}{b}^T G$，则

$$\underset{\sim}{G}=(g_1,g_2,g_3) \tag{4-2-15}$$

则可将(4－2－14)式扩展为

$$\underset{\sim}{C}=\int_B \underset{\sim}{G}^T\underset{\sim}{T}\,dm \tag{4-2-16}$$

这里

$$\underset{\sim}{C}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{C}_1\\ \underset{\sim}{C}_2\\ \underset{\sim}{C}_3\end{bmatrix}$$

是$(3\times r)$矩阵，$\underset{\sim}{C}_1,\underset{\sim}{C}_2,\underset{\sim}{C}_3$是它的行子阵.

此外，显然由(4－2－13)式还有关系式

$$\underset{\sim}{G}=(g_1,g_2,g_3)=\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{C}^T$$

因而有

$$\int_B \underset{\sim}{G}^T\underset{\sim}{G}\,dm=\int_B \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{C}^T dm=\underset{\sim}{C}\left\{\int_B \underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{T}\,dm\right\}\underset{\sim}{C}^T$$

由附录中(B－17)式可知

$$\int_B \underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{T}\,dm=\underset{\sim}{I}$$

其中$\underset{\sim}{I}$是单位方阵，这是正交规格化条件，由此得

$$\int_B \underset{\sim}{G}^T\underset{\sim}{G}\,dm=\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{C}^T \tag{4-2-17}$$

有了(4－2－16)式和(4－2－17)式我们就可以证明(4－2－8)及(4－2－9)的特性.

为此，我们先令$\underset{\sim}{G}=\underset{\sim}{I}$，$\underset{\sim}{I}$是$(3\times 3)$的单位方阵. 这时，由(4－2－16)式及(4－2－4)式可知

$$\underset{\sim}{C}=\int_B \underset{\sim}{I}^T\underset{\sim}{T}\,dm=\int_B \underset{\sim}{T}\,dm=\underset{\sim}{P}$$

再利用(4－2－17)式可得

$$\underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{P}^T=\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{C}^T=\int_B \underset{\sim}{G}^T\underset{\sim}{G}\,dm=\int_B \underset{\sim}{I}^T\underset{\sim}{I}\,dm=\int_B \underset{\sim}{I}\,dm=\underset{\sim}{I}\,m$$

这就是待证明的(4－2－8)式.

再令$\underset{\sim}{G}=\underset{\sim}{\tilde{\rho}}$，则由(4－2－16)式及(4－2－5)式可有

$$\underset{\sim}{C}=\int_B \underset{\sim}{\tilde{\rho}}\,\underset{\sim}{T}\,dm=\underset{\sim}{H}$$

再利用(4－2－17)式可得

$$\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{H}^T=\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{C}^T=\int_B \underset{\sim}{G}^T\underset{\sim}{G}\,dm=\int\underset{\sim}{\tilde{\rho}}^T\underset{\sim}{\tilde{\rho}}\,dm=\underset{\sim}{J}$$

这就是待证明的(4－2－9)式.

(4－2－8)及(4－2－9)都只当$r\to\infty$(取全部模态)时才是精确成立的．当截取部分模态时，即r为有限值时，上式只近似成立.

现在我们再来讨论惯性完备性准则.

注意(4－2－10)和(4－2－11)两式中，倘若只取有限项，可写成

$$\underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{P}^T=\sum_{k=1}^{r}\underset{\sim}{P}_k\underset{\sim}{P}_k^T=\sum_{k=1}^{r}\underset{\sim}{I}\,m_k=\underset{\sim}{I}\sum_{k=1}^{r}m_k\approx\underset{\sim}{I}\,m$$

$$\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{H}^T=\sum_{k=1}^{r}\underset{\sim}{H}_k\underset{\sim}{H}_k^T=\sum_{k=1}^{r}\underset{\sim}{J}_k\approx\underset{\sim}{J}$$

其中

$$\underset{\sim}{P}_k\underset{\sim}{P}_k^T=\underset{\sim}{I}\,m_k \tag{4-2-18}$$

和

$$\underset{\sim}{H}_k\underset{\sim}{H}_k^T=\underset{\sim}{J}_k \tag{4-2-19}$$

分别称为对应于第 k 阶模态的模态质量和模态惯矩. 而由(4-2-10)和(4-2-11)又可见各阶模态质量之和趋近于系统的质量，各阶模态惯矩之和趋近于系统的惯矩. 所谓惯性完备性准则就是根据各阶模态质量 m_k 在总质量 m 中所占的份额和各阶模态惯矩 $\underset{\sim}{J}_k$ 在总惯矩 $\underset{\sim}{J}$ 中所占份额的大小来决定该阶模态的取舍.

作为举例，我们考虑图 4-1 所示太阳帆板[105]，说明惯性完备性准则的应用.

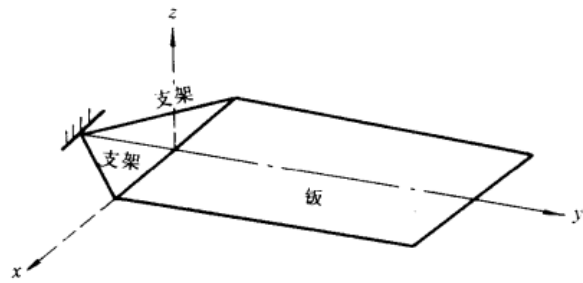


图 4-1　板状太阳帆板

该太阳帆板的总质量为 $m=43.5\text{kg}$. 假若我们只考虑帆板的自身平面外的变形，这时相应地只需考虑绕 x 轴及 y 轴的惯矩，即

$$\underset{\sim}{J}=\begin{bmatrix}J_x & J_{xy}\\ J_{yx} & J_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}530 & 0\\ 0 & 13.85\end{bmatrix}\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

表 4-1

序　号	频　率(Hz)	说　明
1	0.2845	对 y 轴对称
2	1.7248	对 y 轴对称
3	2.0516	对 y 轴反对称
4	4.6655	对 y 轴对称
5	6.4757	对 y 轴反对称
6	8.8918	对 y 轴对称
7	11.7459	对 y 轴反对称
8	15.4613	对 y 轴对称

若已经计算出前八阶的频率和固有振型. 表 4－1 给出了频率，前六阶振型见图 4－2.

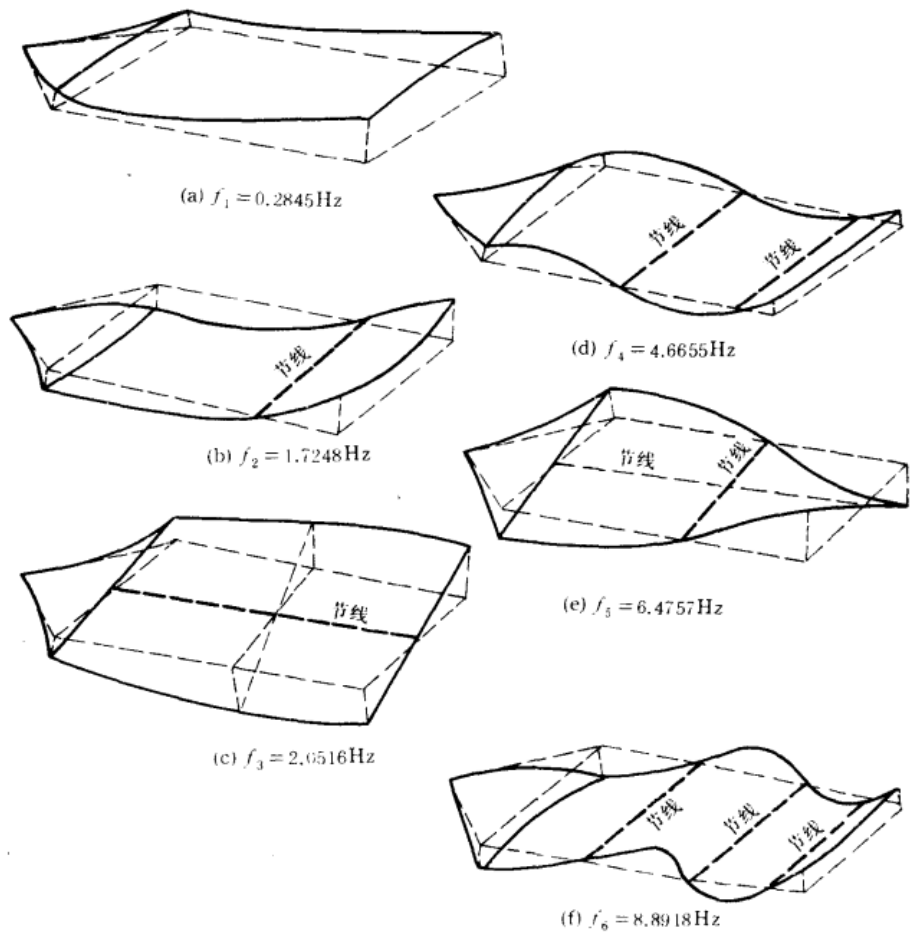


图 4－2　太阳帆板的部分振型

求得的 $\underset{\sim}{P}$ 和 $\underset{\sim}{H}$ 分别为

$$\underset{\sim}{P}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.46 & 2.97 & 10^{-5} & -1.49 & 10^{-5} & 1.48 & 10^{-2} & 0.27 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{H}=\begin{bmatrix} 22.68 & 3.63 & 10^{-5} & -1.04 & 10^{-1} & 0.838 & 10^{-3} & 0.0727 \\ 10^{-6} & 10^{-6} & -3.43 & 10^{-5} & -0.949 & 10^{-4} & 0.426 & 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于这里只考虑沿 z 轴的位移(自身平面外的变形)，因此 $\underset{\sim}{P}$ 中只有第三行有值. $\underset{\sim}{H}$ 中的第三行全为零，这是因为沿 z 轴的惯性力不可能引起绕 z 轴的力矩.

按照(4－2－18)和(4－2－19)求得的模态质量 m_k 和模态惯矩 J_k 分别列在表 4－2

中.

表 4－2

序　号	$J_{xk}(J_{xk}/J_x)$		$J_{yk}(J_{yk}/J_y)$		$m_k(m_k/m)$	
1	514.4	(0.97)	10^{-13}	(0)	29.81	(0.69)
2	13.16	(0.026)	10^{-14}	(0)	8.8209	(0.20)
3	10^{-11}	(0)	11.77	(0.828)	10^{-10}	(0)
4	1.07	(0.002)	10^{-11}	(0)	2.22	(0.05)
5	10^{-10}	(0)	0.901	(0.065)	10^{-10}	(0)
6	0.703	(0.001)	10^{-10}	(0)	2.19	(0.05)
7	10^{-8}	(0)	0.182	(0.013)	10^{-4}	(0)
8	0.005	(0)	10^{-7}	(0)	0.073	(0)

由表 4－2 结果可见，相对于帆板的 y 轴为对称的那些模态，对于 m 及 J_x有贡献，其中尤以第 1 阶模态贡献最大. 相对于帆板的 y 轴为反对称的那些模态，对于 m 无贡献，只对 J_y有贡献，也是频率最小者(这里的第三阶模态)贡献最大. 由此可见，当我们考虑姿态控制模型时，需截取前三阶模态，或取第一及第三两个模态来建立降阶后的动力学方程. 选择前三阶模态，它们对质量的贡献总计达到 89%，也就是说，这样截取模态，对于建立轨道设计的模型就足够了.

Hughes 定义的准则是用 $\underset{\sim}{J}^{-1/2}(\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{H}^T)\underset{\sim}{J}^{-1/2}$的最大特征值 δ 作为指标的[34]. Hughes 称 δ 为惯性完备性指标. 对应于截断不同模态数的 δ 值列在表 4－3 中.

表 4－3

选取模态数	1	2	3	4	5	6	7	8
δ	0.94	0.99	0.99	0.995	0.995	0.997	0.997	0.997

采用这个指标，显然物理概念不及表 4－2 结果鲜明，而且增加计算工作量.

对于本例这种简单结构(因为它的变形特点如弹性力学中的钣，我们称之为似钣结构)，可以看出，$\sum_{k=1}^{r}\underset{\sim}{P}_k\underset{\sim}{P}_k^T$ 向 $m\underset{\sim}{I}$ 收敛得较快；$\sum_{k=1}^{r}\underset{\sim}{H}_k\underset{\sim}{H}_k^T$ 向 $\underset{\sim}{J}$ 则收敛得更快一点. 而且按照 Hughes 的完备性指标截取时，截取结果与按照引言中介绍的模态截断准则基本一致.

在这里，截断与截取两词在含义上稍有不同. 截断是指将截至 m 阶模态的全部全予以保留. 截取则意味着在截至 m 阶的模态中只选取 r 个模态予以保留. 这里显然 $r<m$.

现在再考虑如图 4－3 所示的大型柔性天线. 它由 48 个肋骨“插在”一个内毂上，肋间有预拉伸的薄膜. 整个天线的固有振型及频率可由有限元法求出. 它的模态相当密集. 用 Hughes 建议的惯性完备性指标 δ 做模态截断时，取到 44 阶模态，其惯性完备性指标仍仅为 67%. 因此，Hughes 建议以另外的模态恒等量作为降阶准则. Hughes 曾证明[33]

$$\sum_{j}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^2} \underset{\sim}{H}_j \underset{\sim}{H}_j^T = \sum_{j}^{\infty} \underset{\sim}{\xi}_{jH}$$

和

$$\sum_{j}^{5} \frac{1}{\omega_j^2} \underset{\sim}{P}_j \underset{\sim}{P}_j^T = \sum_{j}^{\infty} \underset{\sim}{\xi}_{jP}$$

都是两个弹性不变量. 因此他建议按 $\underset{\sim}{\xi}_{jH}$(或 $\underset{\sim}{\xi}_{jP}$)的大小而不是按 ω_j^2 的大小重新排列模态的顺序,并截取模态. 这样只需取 9 个模态就可以了.

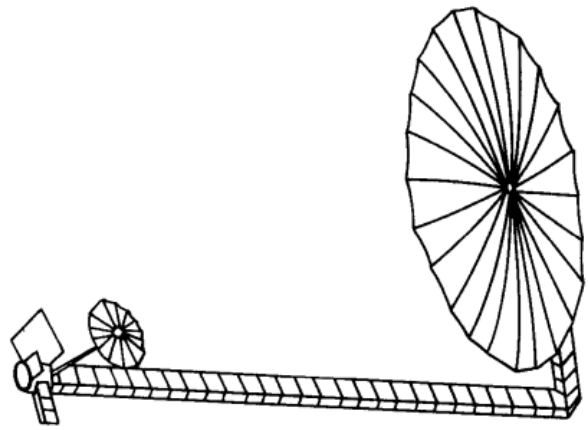


图 4-3　大型柔性附件——天线示意图

Hughes 解释,这个模态恒等量的指标综合考虑频率和惯性影响. 事实上它的物理意义是刚度,因此,这也是一个可供选择的降阶准则,它对大型柔性结构可能更能有效地降阶.

§3. 价值函数和模态价值函数[75,76]

在最优控制理论中,以状态方程组为基础,并定义一个价值函数,再由价值函数的极小值条件定出待定的控制规律.

状态方程组一般包括有以下各组方程(参看附录 B 的 §4):

1)状态方程

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{u} \qquad (4-3-1)$$

$\underset{\sim}{x}$是$(n\times 1)$的状态变量,$\underset{\sim}{u}$是$(p\times 1)$的控制变量;矩阵 $\underset{\sim}{A}$及 $\underset{\sim}{B}$分别称为状态矩阵和控制矩阵,它们具有与 $\underset{\sim}{x}$和 $\underset{\sim}{u}$相容的维数. 此外还有

2)观测方程:

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{x} \qquad (4-3-2)$$

3)控制方程

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{x} \qquad (4-3-3)$$

$\underset{\sim}{y}$是观测变量,是$(m\times 1)$矩阵;$\underset{\sim}{C}$是观测矩阵,$\underset{\sim}{G}$是增益矩阵. 它们具有与 $\underset{\sim}{y}$和 $\underset{\sim}{u}$相容的维

数. 将(4-3-3)代入(4-3-1),得

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = (\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{G})\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{x} \tag{4-3-4}$$

还有初始条件 $\underset{\sim}{x}(0)$. 一般讲 $\underset{\sim}{x}(0)$不是确定的,但具有概率规律性. 这就是说,在多次重复中,每次的 $\underset{\sim}{x}(0)$值可能取这样或那样的值,但不能确切预知是哪一个值. 我们称$\underset{\sim}{x}(0)$为随机向量,每次的值是它的一次样本. 各次样本值是随机的,但多次样本的平均值,称作该随机向量的均值,是一个确定值. 在这里我们约定初始值 $x(0)$的均值为零,记作

$$E\{\underset{\sim}{x}(0)\} = 0 \tag{4-3-5}$$

这里 $E\{\cdot\}$是将$\{\cdot\}$的多次样本取平均值的意思,在概率论中又称为取期望值.

又对 $\underset{\sim}{x}(0)$的某一次样本而言,其偏差为

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{x}(0) - E\{\underset{\sim}{x}(0)\}$$

再将 $\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}^T$ 的样本的多次均值记为

$$E\{\underset{\sim}{\varepsilon}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^T\} = \underset{\sim}{\Sigma} \tag{4-3-6}$$

$\underset{\sim}{\Sigma}$ 称为方差阵(variance). 倘若 $\underset{\sim}{\Sigma} = \mathrm{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \cdots)$ 我们称 $\underset{\sim}{\varepsilon}$ 是白噪的. 在 $E\{\underset{\sim}{x}(0)\} = 0$ 时,则相应的

$$E\{\underset{\sim}{x}(0)\underset{\sim}{x}^T(0)\} = \underset{\sim}{\Sigma}$$

在更一般情况,$\underset{\sim}{x}(0)$可能是复数,这时上式写作

$$E\{\underset{\sim}{x}(0)\underset{\sim}{x}^*(0)\} = \underset{\sim}{\Sigma} \tag{4-3-7}$$

$\underset{\sim}{x}^*(0)$ 是 $\underset{\sim}{x}(0)$ 的共轭转置阵. $\underset{\sim}{\Sigma}$ 在这里假设是白噪的.

价值函数(cost function)一般取为

$$V = E\left\{\int_0^\infty (\underset{\sim}{y}^*\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{u}^*\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{u})dt\right\} \tag{4-3-8}$$

$\underset{\sim}{y}$和 $\underset{\sim}{u}$是观测变量和控制变量,Q和 R是我们给定的权系数阵. 价值函数的物理意义可以这样理解:假如我们认为控制的目的是使观测变量为零,这样价值函数 V 中第一项就是观测变量的误差加权平方和的均值;V 中第二项的物理意义是控制变量 $\underset{\sim}{u}$的"能量"度量. 令 V 有极小值就是根据观测值的误差加权平方和极小条件确定能量极小的控制变量. 在(4-3-8)式中用了取期望值的符号 $E\{\cdots\}$,这是因为 $\underset{\sim}{y}$由 $\underset{\sim}{x}$而定,因而它也是随机变量. 这里也认为一般情况下 $\underset{\sim}{y}$及 $\underset{\sim}{u}$可能是复数量,$\underset{\sim}{y}^*$ 和 $\underset{\sim}{u}^*$是它们的共轭转置.

现在我们来求模态价值. 为此,我们先将状态变量 $\underset{\sim}{x}$做模态展开.

(4-3-4)式中的 $\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{G}$一般为非对称,对应于其特征值 λ_i 有右乘特征向量 $\underset{\sim}{h}_i$ 和左乘特征向量 $\underset{\sim}{f}_i$,分别为

$$\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{h}_j = \lambda_j\underset{\sim}{h}_j$$

和

$$\underset{\sim}{f}_i\underset{\sim}{D} = \lambda_i\underset{\sim}{f}_i \tag{4-3-9}$$

而且有

$$\underset{\sim}{f}_i\underset{\sim}{h}_j = \delta_{ij} \quad \text{或} \quad \underset{\sim}{f}\,\underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{I} \tag{4-3-10}$$

这里显然 $\underset{\sim}{f}_i$ 是行阵;$\underset{\sim}{h}_j$ 是列阵. $\underset{\sim}{f}$是以 $\underset{\sim}{f}_i$ 为行子阵的列阵. $\underset{\sim}{h}$是以 $\underset{\sim}{h}_j$ 为列子阵的行阵. 又对于 $\underset{\sim}{D}$的共轭转置阵 $\underset{\sim}{D}^*$ 应有特征值 λ_i^*,并有右乘特征向量 $\underset{\sim}{f}_i^*$ 和左乘特征向量 $\underset{\sim}{h}_i^*$,即

$$\underset{\sim}{h}_i^*\underset{\sim}{D}^* = \lambda_i^*\underset{\sim}{h}_i^*$$

$$\underset{\sim}{D}^{*}\underset{\sim}{f}_{j}^{*}=\lambda_{j}^{*}\underset{\sim}{f}_{j} \tag{4-3-11}$$

而且有

$$\underset{\sim}{h}_{i}^{*}\underset{\sim}{f}_{j}^{*}=\delta_{ij}\quad 或\quad \underset{\sim}{h}^{*}\underset{\sim}{f}^{*}=\underset{\sim}{I} \tag{4-3-12}$$

这里显然 $\underset{\sim}{h}_{i}^{*}$ 是 $\underset{\sim}{h}_{i}$ 的共轭转置阵，应为行阵；$\underset{\sim}{f}_{j}^{*}$ 是 $\underset{\sim}{f}_{j}$ 的共轭转置阵，应是列阵. $\underset{\sim}{h}^{*}$ 和 $\underset{\sim}{f}^{*}$ 分别是 $\underset{\sim}{h}$ 和 $\underset{\sim}{f}$ 的共轭转置阵.

在模态展开时，令

$$\underset{\sim}{x}=\sum_{i=1}^{r}\underset{\sim}{h}_{i}\tau_{i}=\underset{\sim}{h}\,\underset{\sim}{\tau} \tag{4-3-13}$$

和

$$\underset{\sim}{x}^{*}=\sum_{i=1}^{r}\tau_{i}^{*}\underset{\sim}{h}_{i}^{*}=\underset{\sim}{\tau}^{*}\underset{\sim}{h}^{*} \tag{4-3-14}$$

r 是保留的模态的数目. $\underset{\sim}{\tau}$ 是模态坐标列阵，$\underset{\sim}{\tau}^{*}$ 是它的共轭转置阵，为行阵.

这样，状态方程就被解耦而变成

$$\dot{\tau}_{i}=\lambda_{i}\tau_{i}\quad i=1,2,\cdots \tag{4-3-15}$$

并有

$$\dot{\tau}_{i}^{*}=\lambda_{i}^{*}\tau_{i}^{*}\quad i=1,2,\cdots \tag{4-3-16}$$

观测方程则变成

$$\underset{\sim}{y}=\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{h}\,\underset{\sim}{\tau}=\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{\tau}=\sum_{i=1}^{r}\underset{\sim}{S}_{i}\tau_{i} \tag{4-3-17}$$

并有

$$\underset{\sim}{y}^{*}=\sum_{i=1}^{r}\underset{\sim}{\tau}_{i}^{*}\underset{\sim}{S}_{i}^{*}=\tau^{*}\underset{\sim}{S}^{*}$$

而控制方程就变成

$$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{h}\,\underset{\sim}{\tau}=\sum_{i=1}^{r}\underset{\sim}{g}_{i}\tau_{i}=\underset{\sim}{g}\,\underset{\sim}{\tau} \tag{4-3-18}$$

并有

$$\underset{\sim}{u}^{*}=\underset{\sim}{\tau}^{*}\underset{\sim}{g}^{*}$$

其中

$$\underset{\sim}{S}_{i}=\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{h}_{i}，还有\ \underset{\sim}{S}=(\underset{\sim}{S}_{1},\cdots,\underset{\sim}{S}_{i},\cdots,\underset{\sim}{S}_{r}) \tag{4-3-19}$$

$$\underset{\sim}{g}_{i}=\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{h}_{i}，和\ \underset{\sim}{g}=(\underset{\sim}{g}_{1},\cdots,\underset{\sim}{g}_{i},\cdots,\underset{\sim}{g}_{r}) \tag{4-3-20}$$

分别称为第 i 阶模态的模态观测阵和模态增益阵. $\underset{\sim}{S}_{i}^{*}$ 和 $\underset{\sim}{g}_{i}^{*}$ 是它们的共轭转置阵.

将(4-3-17)和(4-3-18)代入(4-3-8)的价值函数 V 中，得到

$$V=E\left\{\int_{0}^{\infty}[\underset{\sim}{\tau}^{*}(\underset{\sim}{S}^{*}\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{S}+\underset{\sim}{g}^{*}\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{g})\underset{\sim}{\tau}]dt\right\}$$

或

$$V=E\left\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\int_{7}^{\infty}\tau_{i}^{*}(\underset{\sim}{S}_{i}^{*}\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{S}_{j}+\underset{\sim}{g}_{i}^{*}\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{g}_{j})\tau_{j}dt\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\int_{0}^{\infty}\tau_{i}^{*}\Delta_{ij}\tau_{j}dt\right\}=\sum_{i=1}^{r}V_{i}$$

其中

$$\Delta_{ij} = \underset{\sim}{S}_i^* \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{S}_j + g_i^* \underset{\sim}{R}\, g_j \tag{4-3-21}$$

是个标量，而

$$V_i = E\left\{ \sum_{j=1}^{r} \int_0^\infty \tau_i^* \Delta_{ij} \tau_j dt \right\} \tag{4-3-22}$$

称为第 i 阶模态的模态价值.

现在来计算(4-3-22)式中的积分，为此令

$$\tau_i^* \Delta_{ij} \tau_j = -\frac{d}{dt}(\tau_i^* P_{ij} \tau_j) \tag{4-3-23}$$

这样，就可得出

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tau_i^* \Delta_{ij} \tau_j dt &= -\int_0^\infty \frac{d}{dt}(\tau_i^* P_{ij} \tau_j) dt \\ &= -(\tau_i^* P_{ij} \tau_j)\Big|_0^\infty \\ &= \tau_i^*(0) P_{ij} \tau_j(0) - \tau_i^*(\infty) P_{ij} \tau_j(\infty) \end{aligned}$$

由于系统总是有阻尼的，因而 $\tau_i^*(\infty)=0$ 和 $\tau_j(\infty)=0$，这样

$$\int_0^\infty \tau_i^* \Delta_{ij} \tau_j dt = \tau_i^*(0) P_{ij} \tau_j(0) \tag{4-3-24}$$

现在需求定标量 P_{ij}. 为此，将(4-3-23)的右侧展开：

$$\tau_i^* \Delta_{ij} \tau_j = -\dot{\tau}_i^* P_{ij} \tau_j - \tau_i^* P_{ij} \dot{\tau}_j$$

再将(4-3-15)式和(4-3-16)式代入上式，整理后，得

$$\tau_i^* \Delta_{ij} \tau_j = -(\lambda_i^* + \lambda_j) P_{ij} \tau_i^* \tau_j$$

由此可得

$$P_{ij} = -\Delta_{ij}/(\lambda_i^* + \lambda_j) \tag{4-3-25}$$

将(4-3-25)及(4-3-24)代入(4-3-22)式中，得

$$V_i = -\sum_{j=1}^{r} E\left\{ \frac{\Delta_{ij}}{\lambda_i^* + \lambda_j} \tau_j(0) \tau_i^*(0) \right\}$$

注意上式右侧只有 $\tau_i \tau_j^*$ 是随机量，因此第 i 阶模态价值 V_i 为

$$V_i = -\sum_{j=1}^{r} \frac{\Delta_{ij}}{\lambda_i^* + \lambda_j} E\{\tau_j(0) \tau_i^*(0)\} \tag{4-3-26}$$

记随机向量 $\underset{\sim}{\tau}(0)$ 的协方差阵为

$$E\{\underset{\sim}{\tau}(0) \underset{\sim}{\tau}^*(0)\} = \underset{\sim}{\Theta} \tag{4-3-27}$$

还注意 $\underset{\sim}{\tau}(0)$ 是元素为 $\tau_j(0)$ 的列阵；$\underset{\sim}{\tau}^*(0)$ 是以 $\tau_i^*(0)$ 为元素的行阵，而 $\underset{\sim}{\Theta}$ 的元素是 θ_{ij}. 这样

$$\theta_{ji} = E\{\tau_j(0) \tau_i^*(0)\} \tag{4-3-28}$$

将(4-3-28)代入(4-3-26)得到第 i 阶模态价值 V_i 为

$$V_i = -\sum_{j=1}^{r} \frac{\Delta_{ij}}{\lambda_i^* + \lambda_j} \theta_{ji} \tag{4-3-29}$$

式中的 θ_{ji} 可由(4-3-27) 中的 $\underset{\sim}{\Theta}$ 找出，而 $\underset{\sim}{\Theta}$ 可通过 $\underset{\sim}{x}(0)$ 的方差阵 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 求出，求法如下：

由(4-3-7)式有

$$\underset{\sim}{\Sigma}= E\{\underset{\sim}{x}(0)x^*(0)\}$$

将(4-3-13)和(4-3-14)式代入上式,得

$$\underset{\sim}{\Sigma} = E\{\underset{\sim}{h}\,\underset{\sim}{\tau}(0)\tau^*(0)\underset{\sim}{h}^*\} = \underset{\sim}{h}\,(E\{\underset{\sim}{\tau}(0)\underset{\sim}{\tau}^*(0)\})\underset{\sim}{h}^*$$
$$= \underset{\sim}{h}\,\underset{\sim}{\Theta}\,\underset{\sim}{h}^*$$

再于上式两侧同时左乘以 $\underset{\sim}{f}$ 和右乘以 $\underset{\sim}{f}^*$,并利用(4-3-10)和(4-3-12),可求得

$$\underset{\sim}{\Theta}= \underset{\sim}{f}\,\underset{\sim}{\Sigma}\,\underset{\sim}{f}^*$$

注意在上式中 $\underset{\sim}{f}$ 是以行阵 $\underset{\sim}{f}_j$ 为元素的列阵,$\underset{\sim}{f}^*$ 是以列阵 $\underset{\sim}{f}_i^*$ 为元素的行阵,因而 $\underset{\sim}{\Theta}$ 的元素为

$$\theta_{ji} = \underset{\sim}{f}_j\underset{\sim}{\Sigma}\,\underset{\sim}{f}_i^* \tag{4-3-30}$$

θ_{ji} 可称为模态协方差.

将(4-3-21)中的 Δ_{ij} 和(4-3-30)中的 θ_{ij} 代入(4-3-29)中,最后得到第 i 阶模态的模态价值 V_i 的表达式

$$V_i = -\sum_{j=1}^{r}\frac{(\underset{\sim}{S}_i^*\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{S}_j + \underset{\sim}{g}_i^*\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{g}_j)}{\lambda_i^* + \lambda_j}\underset{\sim}{f}_j\underset{\sim}{\Sigma}\,\underset{\sim}{f}_i^* \tag{4-3-31}$$

再考虑另一类最优控制问题,即有随机干扰时的最优控制问题. 这时问题表达为:状态方程

$$\dot{\underset{\sim}{x}}= \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x}+ \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{u}+ \underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{w}(t) \tag{4-3-32}$$

观测方程

$$\underset{\sim}{y}= \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{x}$$

控制方程

$$\underset{\sim}{u}= \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{x}$$

上列诸式中,各量含义如前,只是多了一个随机干扰 $\underset{\sim}{w}(t)$ 和相应的干扰矩阵 $\underset{\sim}{N}$. 干扰矩阵 $\underset{\sim}{N}$ 取决于干扰源的分布. 干扰 $\underset{\sim}{w}(t)$ 当然是一个随机向量,而且为随时间变化的随机向量,因而

$$E\{\underset{\sim}{w}(t)\underset{\sim}{w}(s)\} = \underset{\sim}{W} \tag{4-3-33}$$

这里 t 和 s 是两个不同时刻. $\underset{\sim}{W}$ 是 $\underset{\sim}{w}(t)$ 的方差阵. 当 $\underset{\sim}{w}(t)$ 诸元素互不相关时,$\underset{\sim}{W}$ 是对角阵.

价值函数则定义为

$$V = \lim_{t\to\infty}E\{\underset{\sim}{y}^t\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{y}+ \underset{\sim}{u}^T\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{u}\} \tag{4-3-34}$$

令

$$\underset{\sim}{\Sigma}= \underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{N}^T \tag{4-3-35}$$

则可证明[75],对应于 i 模态的模态价值仍为

$$V_i = -\sum_{j=1}^{r}\frac{\underset{\sim}{S}_i^*\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{S}_j + \underset{\sim}{g}_i^*\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{g}_j}{\lambda_i^* + \lambda_j}\underset{\sim}{f}_j\underset{\sim}{\Sigma}\,\underset{\sim}{f}_i^* \tag{4-3-36}$$

不过此时 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 由(4-3-35)式决定. 当干扰是白噪音干扰时,$\underset{\sim}{\Sigma}= \mathrm{diag}\{\sigma_{11},\cdots\}$. 注意(4-3-30)式,则(4-3-36)与(4-3-31)在形式上是相同的,不过 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 分别由(4-3-35)和(4-3-7)定义.

§4. 模态价值分析准则[75,34]

模态价值分析准则是根据(4-3-31)式的模态价值对系统价值函数的贡献决定对该阶模态的取舍. 系统的价值函数 V 是各阶模态价值之和，设系统总计有 T 阶模态，则有

$$V = \sum_{k=1}^{T} V_k \tag{4-4-1}$$

Skelton 和 Hughes 曾引入模型质量指标(Model Quality Index，简记作 MQI)

$$\mathrm{MQI} = \sum_{k=1}^{r} V_k \Big/ \sum_{k=1}^{T} V_k = \frac{\sum_{k=1}^{r} V_k}{V}$$

其中 $\sum_{k=1}^{r} V_k$ 表示保留下的模态价值. 当然 MQI 接近于 1 时表示该模型质量最理想.

倘若令

$$(\mathrm{MQI})_k = V_k \Big/ \sum_{k=1}^{T} V_k \tag{4-4-2}$$

模态价值分析准则的含义就是在模态降阶时，优先保留 $(\mathrm{MQI})_k$ 较大的模态 T_k.

按(4-4-2)的 $(\mathrm{MQI})_k$ 大小取舍模态坐标时，需进一步具体计算 k 阶模态价值.

在工程应用中，再采用两个假设：

1. 白噪音假设，就是说 $\underset{\sim}{\Sigma} = \mathrm{diag}\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \cdots\}$，

事实上倘注意 $\theta_{ij} = \underset{\sim}{f}_i \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{f}_j^*$ 和(B-51)式关于 $\underset{\sim}{f}$ 和 $\underset{\sim}{f}^*$ ($\underset{\sim}{f}_i$ 和 $\underset{\sim}{f}_j^*$ 分别是它的第 i 行和第 j 列) 的结构，不难证明在 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 为对角方阵时

$$\underset{\sim}{f}_i \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{f}_j^* = \theta_{ij}\delta_{ij} \tag{4-4-3}$$

因而在白噪音情况下 $\underset{\sim}{\Theta} = \mathrm{diag}\{\theta_{11}, \theta_{22}, \cdots\}$.

2. 小阻尼假设，即 $0 < \xi_k \leqslant 1$. 这样就有

$$\begin{aligned} \lambda_k &= -\xi_k\omega_k + j\omega_k \\ \lambda_{k+m} &= -\xi_k\omega_k - j\omega_k \quad k = 1, 2, \cdots, m \end{aligned} \tag{4-4-4}$$

式中 ω_k 是无阻尼时的固有频率，且 $2m = T$.

这样，(4-4-1)式可以改写成

$$V = \sum_{i=1}^{T} V_i = \sum_{k=1}^{M} (V_k + V_{k+M})$$

而其中 V_k 及 V_{k+m} 可由(4-3-31)给出.

为了讨论方便，我们先讨论开环情况. 这时 $\underset{\sim}{R} = 0$，再注意(4-4-3)和(4-4-4)可知 V_k 和 V_{k+m} 分别是

$$V_k = -\frac{\underset{\sim}{S}_k^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_k \underset{\sim}{f}_k \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{f}_k^*}{\lambda_k^* + \lambda_k} = \frac{(\underset{\sim}{S}_k^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_k)(\underset{\sim}{f}_k \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{f}_k^*)}{2\xi_k\omega_k}$$

$$V_{k+m} = -\frac{\underset{\sim}{S}_{k+m}^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_{k+m} \underset{\sim}{f}_{k+m} \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{f}_{k+m}^*}{\lambda_{k+m}^* + \lambda_{k+m}} = \frac{\underset{\sim}{S}_{k+m}^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_{k+m} \underset{\sim}{f}_{k+m} \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{f}_{k+m}^*}{2\xi_k\omega_k}$$

现在可以进一步证明

$$\underset{\sim}{S}_k^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_k = \underset{\sim}{S}_{k+m}^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_{k+m}$$
$$\underset{\sim}{f}_k \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{f}_k^* = \underset{\sim}{f}_{k+m} \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{f}_{k+m}^* \qquad (4-4-5)$$

事实上考查(B－50)可知

$$\bar{\underset{\sim}{h}}_k = \underset{\sim}{h}_{k+m}, \qquad \bar{\underset{\sim}{f}}_k = \underset{\sim}{f}_{k+m}$$

$\bar{\underset{\sim}{h}}_k$ 是由 $\underset{\sim}{h}_k$ 的元素的共轭数组成的列阵. 注意 $\bar{\underset{\sim}{h}}_k$ 与 $\underset{\sim}{h}_k^*$ 的不同，后者是 $\underset{\sim}{h}_k$ 的共轭转置阵，是个行阵. 还有 $\bar{\underset{\sim}{h}}_k^* = \underset{\sim}{h}_{k+m}^*$，这因为 $\underset{\sim}{h}_k^*$（和 $\underset{\sim}{h}_k$）的元素与 $\underset{\sim}{h}_{k+m}^*$（和 $\underset{\sim}{h}_{k+m}$）的元素互为共轭数.

类似地有

$$\bar{\underset{\sim}{h}}_k^* = \underset{\sim}{h}_{k+m}^* \text{ 和 } \bar{\underset{\sim}{f}}_k^* = \underset{\sim}{f}_{k+m}^*$$

这样，根据(4－3－19)

$$\underset{\sim}{S}_{k+m} = \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{h}_{k+m} = \underset{\sim}{C}\, \bar{\underset{\sim}{h}}_k = \bar{\underset{\sim}{S}}_k$$

$$\underset{\sim}{S}_{k+m}^* = \underset{\sim}{h}_{k+m}^* \underset{\sim}{C} = \bar{\underset{\sim}{h}}_k^* \underset{\sim}{C} = \bar{\underset{\sim}{S}}_k^*$$

$\bar{\underset{\sim}{S}}_k$（$\bar{\underset{\sim}{S}}_k^*$）与 $\underset{\sim}{S}_k$（$\underset{\sim}{S}_k^*$）的相应元素也互为共轭，但都是列(行)阵. 因之很容易证明(4－4－5)式右侧的二次型为

$$\underset{\sim}{S}_{k+m}^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_{k+m} = \bar{\underset{\sim}{S}}_k^* \underset{\sim}{Q} \bar{\underset{\sim}{S}}_k$$

显然很容易证明，当 $\underset{\sim}{Q}$ 是对称矩阵时

$$\bar{\underset{\sim}{S}}_k^* \underset{\sim}{Q} \bar{\underset{\sim}{S}}_k = \underset{\sim}{S}_k^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_k = \sum_j \sum_p Q_{jp} S_{kj} S_{kp}^*$$

其中 Q_{jp} 是 $\underset{\sim}{Q}$ 的元素，S_{kj} 是 $\underset{\sim}{S}_k$ 的元素，S_{kp}^* 是 $\underset{\sim}{S}_k^*$ 的元素. 于是，很显然有

$$\underset{\sim}{S}_{k+m}^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_{k+m} = \underset{\sim}{S}_k^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_k$$

这就是(4－4－5)的第一式，同样思路可以证明(4－4－5)的第二式.

根据(4－4－5)，可得出结论：

$$V_k = V_{k+m} = \frac{\underset{\sim}{S}_k^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_k \underset{\sim}{f}_k \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{f}_k^*}{2\xi_k \omega_k} \qquad (4-4-6)$$

因而有

$$V = \sum_{k=1}^{M} (V_k + V_{k+m}) = \sum_{k=1}^{m} 2V_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\underset{\sim}{S}_k^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_k \underset{\sim}{f}_k \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{f}_k^*}{\xi_k \omega_k} \qquad (4-4-7)$$

进一步还可证明，对于(B－51)所示的 $\underset{\sim}{f}$（$\underset{\sim}{f}_k$ 是它的一行），有

$$\underset{\sim}{f}_k \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{f}_k^* = \frac{\sigma_{kk}^2}{4\omega_k^2} \qquad (4-4-8)$$

这样最终得出了开环时，白噪音和小阻尼假设下的模态价值 V_k 为

$$V_k = \frac{1}{4} \frac{\underset{\sim}{S}_k^* \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{S}_k}{\xi_k \omega_k^3} \cdot \sigma_{kk}^2 \qquad (4-4-9)$$

我们根据 $V_k / \sum_{k=1}^{m} V_k$ 的大小，依由大到小的顺序决定对模态的截断.

在闭环时，情况比较复杂. 这时所有固有模态和频率应是根据 $\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{G}$ 求出的，因此全部运算与 $\underset{\sim}{G}$ 有关. 而 $\underset{\sim}{G}$ 又是待定的增益矩阵. 因此全部工作只能迭代进行. 例如先由

开环情况(此时各固有频率及固有模态根据 $\underset{\sim}{A}$ 矩阵求出)得出的模型质量指标$(MQI)_k$确定一个降阶模型,用它可以离线地计算出增益阵的第一次近似 G_1. 利用这个 G_1 可求得 $\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}G_1$,再由 $\underset{\sim}{D}$ 求闭环的降阶模型. 这个模型可供闭环实时在线之用.

§5. 内部平衡降阶准则

系统的内部平衡是80年代初期在研究控制系统状态空间的鲁棒(Robust)近似中提出的一个概念. 基于内部平衡概念,结合系统的响应,可建立平衡降阶(Balanced Reduction)准则.

首先我们介绍关于内部平衡系统的定义.

考虑一个线性、定常的渐近稳定系统:

$$\dot{\underset{\sim}{x}}=\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{u} \tag{4-5-1}$$

$$\underset{\sim}{y}=\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{x} \tag{4-5-2}$$

其中 $\underset{\sim}{x}$ 是状态变量,为$(n\times 1)$列阵;$\underset{\sim}{y}$ 是观测变量,为$(m\times 1)$列阵;$\underset{\sim}{u}$ 是控制变量,为$(p\times 1)$列阵;$\underset{\sim}{A}$ 是$(n\times n)$状态矩阵;$\underset{\sim}{B}$ 是$(n\times p)$控制矩阵;$\underset{\sim}{C}$ 是$(m\times n)$阶观测矩阵. 这是对一个系统的动力学状态方程描述,参看附录B.

在线性系统理论中,给出了关于它的能控 Gram 阵 $\underset{\sim}{W}_c^2$ 和能观 Gram 阵 $\underset{\sim}{W}_g^2$ 的定义,分别为

$$\underset{\sim}{W}_c^2=\int_0^\infty e^{\underset{\sim}{A}t}\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{B}^T e^{\underset{\sim}{A}^T t}dt \tag{4-5-3}$$

$$\underset{\sim}{W}_g^2=\int_0^\infty e^{\underset{\sim}{A}t}\underset{\sim}{C}^T\underset{\sim}{C}\,e^{\underset{\sim}{A}^T t}dt \tag{4-5-4}$$

它们可由 Lyapunov 方程求出:

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{W}_c^2+\underset{\sim}{W}_c^2\underset{\sim}{A}^T+\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{B}^T=0 \tag{4-5-5}$$

$$\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{W}_g^2+\underset{\sim}{W}_g^2\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{C}^T\underset{\sim}{C}=0 \tag{4-5-6}$$

$\underset{\sim}{W}_c^2$ 和 $\underset{\sim}{W}_g^2$ 都是半正定矩阵,各有非负特征值,分别记作 $\underset{\sim}{\Sigma}_c^2$ 和 $\underset{\sim}{\Sigma}_g^2$,对应有特征向量 $\underset{\sim}{V}_c$ 和 $\underset{\sim}{V}_g$. 这里

$$\underset{\sim}{\Sigma}_c=\mathrm{diag}\{\sigma_{c1},\cdots,\sigma_{ck},\cdots,\sigma_{cN}\} \tag{4-5-7}$$

$$\underset{\sim}{\Sigma}_g=\mathrm{diag}\{\sigma_{g1},\cdots,\sigma_{gk},\cdots,\sigma_{gN}\} \tag{4-5-8}$$

倘若系统的

$$\underset{\sim}{W}_g^2=\underset{\sim}{W}_c^2=\underset{\sim}{\Sigma}_g^2 \tag{4-5-9}$$

我们就称该系统是输入输出平衡的,或内部平衡的. 其中 $\underset{\sim}{\Sigma}_g^2$ 的元素 σ_{gk}^2 称为系统的能控能观奇异值.

Moore 证明[64],对于一个渐近平衡系统可以通过以下的相似变换而得出内部平衡系统,具体作法如下.

对于(4-5-1)和(4-5-2)系统(简记作$[A,B,C]$系统),先由(4-5-5)求得其能控 Gram 阵 $\underset{\sim}{W}_c^2$,并求得 $\underset{\sim}{W}_c^2$ 的特征值 $\underset{\sim}{\Sigma}_c^2$ 和特征向量 $\underset{\sim}{V}_c$:

$$\underset{\sim}{W}_c^2\underset{\sim}{V}_c=\underset{\sim}{V}_c\underset{\sim}{\Sigma}_c^2$$

利用特征向量的正交条件 $\underset{\sim}{V}_c\underset{\sim}{V}_c^T=\underset{\sim}{I}$，全式后乘 $\underset{\sim}{V}_c^T$ 得

$$\underset{\sim}{W}_c^2=\underset{\sim}{V}_c\underset{\sim}{\Sigma}_c^2\underset{\sim}{V}_c^T \tag{4-5-10}$$

现在指定变换矩阵 $\underset{\sim}{P}_1$，令

$$\underset{\sim}{P}_1=\underset{\sim}{V}_c\underset{\sim}{\Sigma}_c \tag{4-5-11}$$

并对(4-5-1)式进行相似变换，就是说先令

$$\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{P}_1\tilde{\underset{\sim}{x}} \tag{4-5-12}$$

代入(4-5-1)和(4-5-2)，再对(4-5-1)全式前乘以 $\underset{\sim}{P}_1^{-1}$，这样得

$$\dot{\hat{\underset{\sim}{x}}}=\hat{\underset{\sim}{A}}\hat{\underset{\sim}{x}}+\hat{\underset{\sim}{B}}u \tag{4-5-13}$$

和

$$\hat{\underset{\sim}{y}}=\hat{\underset{\sim}{C}}\hat{\underset{\sim}{x}} \tag{4-5-14}$$

其中

$$\tilde{\underset{\sim}{A}}=\underset{\sim}{P}_1^{-1}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P}_1 \tag{4-5-15}$$

$$\tilde{\underset{\sim}{B}}=\underset{\sim}{P}_1^{-1}\underset{\sim}{B} \tag{4-5-16}$$

$$\tilde{\underset{\sim}{C}}=\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{P}_1 \tag{4-5-17}$$

$\tilde{\underset{\sim}{A}}$称为由 $\underset{\sim}{A}$经相似变换而得的矩阵，或 $\underset{\sim}{A}$的相似矩阵.

其次，再求对应于(4-5-13)—(4-5-17)的$[\tilde{\underset{\sim}{A}},\tilde{\underset{\sim}{B}},\tilde{\underset{\sim}{C}}]$系统的能观 Gram 阵 $\tilde{\underset{\sim}{W}}_g^2$，它由(4-5-6)求出为

$$\tilde{\underset{\sim}{A}}^T\tilde{\underset{\sim}{W}}_g^2+\tilde{\underset{\sim}{W}}_g^2\tilde{\underset{\sim}{A}}+\tilde{\underset{\sim}{C}}^T\tilde{\underset{\sim}{C}}=0$$

再求出 $\tilde{\underset{\sim}{W}}_g^2$ 的特征值 $\tilde{\underset{\sim}{\Sigma}}_g^2$ 和特征向量 $\tilde{\underset{\sim}{V}}_g$：

$$\tilde{\underset{\sim}{W}}_g^2\tilde{\underset{\sim}{V}}_g=\tilde{\underset{\sim}{V}}_g\tilde{\underset{\sim}{\Sigma}}_g^2$$

利用正交条件 $\tilde{\underset{\sim}{V}}_g\tilde{\underset{\sim}{V}}_g^T=\underset{\sim}{I}$，全式后乘 $\tilde{\underset{\sim}{V}}_g^T$，得

$$\tilde{\underset{\sim}{W}}_g^2=\tilde{\underset{\sim}{V}}_g\tilde{\underset{\sim}{\Sigma}}_g^2\tilde{\underset{\sim}{V}}_g^T \tag{4-5-18}$$

进一步再取变换矩阵 $\underset{\sim}{P}_2$：

$$\underset{\sim}{P}_2=\tilde{\underset{\sim}{V}}_g\tilde{\underset{\sim}{\Sigma}}_g^{-1/2} \tag{4-5-19}$$

并令

$$\tilde{\underset{\sim}{x}}=\underset{\sim}{P}_2\hat{\underset{\sim}{x}} \tag{4-5-20}$$

于是，得

$$\dot{\hat{\underset{\sim}{x}}}=\hat{\underset{\sim}{A}}\hat{\underset{\sim}{x}}+\hat{\underset{\sim}{B}}\underset{\sim}{u} \tag{4-5-21}$$

$$\hat{\underset{\sim}{y}}=\hat{\underset{\sim}{C}}\hat{\underset{\sim}{x}} \tag{4-5-22}$$

$$\underset{\sim}{P}=\underset{\sim}{P}_1\underset{\sim}{P}_2$$

其中

$$\hat{\underset{\sim}{A}}=\underset{\sim}{P}_2^{-1}\tilde{\underset{\sim}{A}}\underset{\sim}{P}_2=\underset{\sim}{P}_2^{-1}\underset{\sim}{P}_1^{-1}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P}_1\underset{\sim}{P}_2=\underset{\sim}{P}^{-1}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P} \tag{4-5-23}$$

$$\hat{\underset{\sim}{B}}=\underset{\sim}{P}_2^{-1}\tilde{\underset{\sim}{B}}=\underset{\sim}{P}_2^{-1}\underset{\sim}{P}_1^{-1}\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{P}^{-1}\underset{\sim}{B} \tag{4-5-24}$$

$$\hat{\underset{\sim}{C}}=\underset{\sim}{\tilde{C}}\,\underset{\sim}{P}_2=\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{P}_1\underset{\sim}{P}_2=\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{P} \tag{4-5-25}$$

现在我们可证明，新的变换后系统$[\hat{\underset{\sim}{A}},\hat{\underset{\sim}{B}},\hat{\underset{\sim}{C}}]$是内部平衡系统，就是说，$[\hat{\underset{\sim}{A}},\hat{\underset{\sim}{B}},\hat{\underset{\sim}{C}}]$满足(4-5-9)，即需证明

$$\hat{W}_c^2=\hat{W}_g^2=\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}_g^2 \tag{4-5-26}$$

为此，先考查$[\hat{\underset{\sim}{A}},\hat{\underset{\sim}{B}},\hat{\underset{\sim}{C}}]$的能控 Gram 阵，由(4-5-5)可知 $\hat{W}_c^2$ 满足：

$$\hat{\underset{\sim}{A}}\,\hat{W}_c^2+\hat{W}_c^2\hat{\underset{\sim}{A}}^T+\hat{\underset{\sim}{B}}\,\hat{\underset{\sim}{B}}^T=0$$

将(4-5-23)到(4-5-25)代入上式可得

$$\underset{\sim}{P}^{-1}\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{P}\,\hat{W}_c^2+\hat{W}_c^2\underset{\sim}{P}^T\underset{\sim}{A}^T\hat{\underset{\sim}{P}}^{-T}+\underset{\sim}{P}^{-1}\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{P}^{-T}=0$$

式中 $\underset{\sim}{P}^{-T}=(\underset{\sim}{P}^{-1})^T=(\underset{\sim}{P}^T)^{-1}$. 全式前乘以 $\underset{\sim}{P}$，后乘以 $\underset{\sim}{P}^T$ 得

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{P}\,\hat{W}_c^2\underset{\sim}{P}^T+\underset{\sim}{P}\,\hat{W}_c^2\underset{\sim}{P}^T\underset{\sim}{A}^T+\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{B}^T=0$$

将此式与(4-5-5)比较可有

$$W_c^2=\underset{\sim}{P}\,\hat{W}_c^2\underset{\sim}{P}^T$$

或

$$\hat{W}_c^2=\underset{\sim}{P}^{-1}W_c^2\underset{\sim}{P}^{-T} \tag{4-5-27}$$

将 $\underset{\sim}{P}=\underset{\sim}{P}_1\underset{\sim}{P}_2$，因而 $\underset{\sim}{P}^{-1}=\underset{\sim}{P}_2^{-1}\underset{\sim}{P}_1^{-1}$，代入上式，得

$$\hat{W}_c^2=\underset{\sim}{P}_2^{-1}\underset{\sim}{P}_1^{-1}W_c^2\underset{\sim}{P}_1^{-T}\underset{\sim}{P}_2^{-T}$$

再将(4-5-11)和(4-5-19)的 $\underset{\sim}{P}_1$ 和 $\underset{\sim}{P}_2$ 代入上式，得

$$\hat{W}_c^2=(\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g^{1/2}\underset{\sim}{\tilde{V}}_g^{-1})(\underset{\sim}{\Sigma}_c^{-1}\underset{\sim}{V}_c^{-1})W_c^2(\underset{\sim}{V}_c^{-T}\underset{\sim}{\Sigma}_c^{-T})(\underset{\sim}{\tilde{V}}_g^{-T}\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g^{1/2})$$

这里注意 $\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_c$ 是对角阵，因而 $\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_c^T=\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_c$. 再将(4-5-10)的 W_c^2 代入上式，得

$$\begin{aligned}\hat{W}_c^2&=(\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g^{1/2}\underset{\sim}{\tilde{V}}_g^{-1}\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_c^{-1}\underset{\sim}{V}_c^{-1})\underset{\sim}{V}_c\underset{\sim}{\Sigma}_c^2\underset{\sim}{V}_c^T(\underset{\sim}{V}_c^{-T}\underset{\sim}{\Sigma}_c^{-T}\underset{\sim}{\tilde{V}}_g^{-T}\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g^{1/2})\\&=\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g^{1/2}\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g^{1/2}=\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g\end{aligned}$$

类似地可以利用(4-5-6)和(4-5-23)—(4-5-25)诸式证明

$$\hat{W}_g^2=\underset{\sim}{P}^TW_g^2\underset{\sim}{P}=\underset{\sim}{P}_2^T\underset{\sim}{P}_1^TW_g^2\underset{\sim}{P}_1\underset{\sim}{P}_2 \tag{4-5-28}$$

再利用(4-5-6)和(4-5-15)—(4-5-17)以及(4-5-18)可得

$$\underset{\sim}{P}_1^TW_g^2\underset{\sim}{P}_1=\tilde{W}_g^2=\underset{\sim}{\tilde{V}}_g\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g^2\underset{\sim}{\tilde{V}}_g^T$$

将上式代入(4-5-28)，并应用(4-5-19)式，最后得出

$$\hat{W}_g^2=\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g=\hat{W}_c^2=\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}_g^2$$

注意 $\hat{W}_g^2$，$\hat{W}_c^2$ 分别是$(\hat{\underset{\sim}{A}},\hat{\underset{\sim}{B}},\hat{\underset{\sim}{C}})$系统的能观 Gram 阵和能控 Gram 阵. 根据(4-5-9)式的定义，$(\hat{\underset{\sim}{A}},\hat{\underset{\sim}{B}},\hat{\underset{\sim}{C}})$是内部平衡系统. 这里定义 $\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}_g^2=\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g$.

由此可将$(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C})$系统平衡化的过程总结如下：

1. 由(4-5-5)式求出 W_c^2.

2. 求 W_c^2 的特征值 Σ_c^2 和特征向量 $\underset{\sim}{V}_c$.

3. 由(4-5-11)求 $\underset{\sim}{P}_1$，再按(4-5-15)至(4-5-17)求$(\tilde{\underset{\sim}{A}},\tilde{\underset{\sim}{B}},\tilde{\underset{\sim}{C}})$.

4. 由$(\tilde{\underset{\sim}{A}},\tilde{\underset{\sim}{B}},\tilde{\underset{\sim}{C}})$根据(4-5-6)求出 $\tilde{\underset{\sim}{W}}_c^2$.

5. 求 $\tilde{\underset{\sim}{W}}_g^2$ 的特征值 $\tilde{\underset{\sim}{\Sigma}}_g^2$ 和特征向量 $\tilde{\underset{\sim}{V}}_g$.

6. 由(4-5-19)求 $\underset{\sim}{P}_2$；再按(4-5-23)—(4-5-25)求出$(\hat{\underset{\sim}{A}},\hat{\underset{\sim}{B}},\hat{\underset{\sim}{C}})$，即为平衡化系统. 注意这里定义 $\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}_g^2=\tilde{\underset{\sim}{\Sigma}}_g$.

为了具体起见，现在以一个模态解耦后的状态方程为例，说明上述平衡化方法的运用[69]. 模态解耦后的方程为

$$\ddot{\tau}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\tau}_i + \omega_i^2\tau_i = \underset{\sim}{b}_i\underset{\sim}{u}; \quad i=1,2,\cdots,N \tag{a}$$

上式中 τ_i 是第 i 阶模态坐标；ω_i 是第 i 阶固有圆频率；ξ_i 是第 i 阶阻尼系数，它们都是标量(可参看附录 B). $\underset{\sim}{b}_i$ 和 $\underset{\sim}{u}$ 分别是$(1\times p)$和$(p\times 1)$的矩阵. (a)代表一组解耦后的动力学方程.

另外，还有观测方程：

$$\underset{\sim}{y}=\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{x}$$

其中 $\underset{\sim}{x}^T=(\underset{\sim}{x}_1^T,\underset{\sim}{x}_2^T,\cdots,\underset{\sim}{x}_N^T)$；$\underset{\sim}{x}_k^T=(\dot{\tau}_k,\tau_k)$；$\underset{\sim}{C}=(\underset{\sim}{C}_1,\underset{\sim}{C}_2,\cdots,\underset{\sim}{C}_k,\cdots,\underset{\sim}{C}_N)$.

(a)式可以写成状态方程的形式：

$$\begin{pmatrix}\ddot{\tau}_k\\ \dot{\tau}_k\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-2\xi_k\omega_k & -\omega_k^2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\tau}_k\\ \tau_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\underset{\sim}{b}_k\\ 0\end{pmatrix}\underset{\sim}{u}$$

或

$$\dot{\underset{\sim}{x}}_k=\underset{\sim}{A}_k\underset{\sim}{x}_k+\underset{\sim}{B}_k u \quad k=1,2,\cdots,N \tag{b}$$

观测方程也可写作

$$\underset{\sim}{y}=\sum_{k=1}^{N}\underset{\sim}{C}_k\underset{\sim}{x}_k \tag{c}$$

其中 $\underset{\sim}{C}_k=(C_{k1},C_{k2})$.

(b)式表明经过模态解耦后，我们得到一组相互独立的子系统$(\underset{\sim}{A}_k,\underset{\sim}{B}_k,\underset{\sim}{C}_k)$；它们通过(c)而耦合成为一个大系统. 我们可独立地对各子系统进行平衡化后，再综合而得大系统的平衡化系统.

现在，我们拟将(b)和(c)的$(\underset{\sim}{A}_k,\underset{\sim}{B}_k,\underset{\sim}{C}_k)$系统平衡化. 按前述步骤：

1. 先求 W_c^2. 根据(b)中 $\underset{\sim}{A}_k$，可将(4-5-5)式写作

$$\begin{bmatrix}-2\xi\omega & -\omega^2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\underset{\sim}{W}_c^2+\underset{\sim}{W}_c^2\begin{bmatrix}-2\xi\omega & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}\underset{\sim}{b}\\ 0\end{pmatrix}(\underset{\sim}{b}^T 0)=0 \tag{d}$$

这里为了书写简洁，略去了下标 k.

如令

$$\underset{\sim}{W}_c^2=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{bmatrix}$$

则由(d)可得出四个标量方程，解出

$$d_{11}=\frac{\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{b}^T}{4\xi\omega}=\lambda^2$$

$$d_{22}=\frac{d_{11}}{\omega^2}=\frac{\lambda^2}{\omega}$$

$$d_{12}=d_{21}=0$$

即

$$\underset{\sim}{W}_c^2=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \lambda^2/\omega^2\end{bmatrix}$$

它的特征值 $\underset{\sim}{\Sigma}_c^2$ 显然是 $\underset{\sim}{W}_c^2$ 本身，而 $\underset{\sim}{V}_c=\underset{\sim}{I}$. 这样，

$$\underset{\sim}{\Sigma}_c^2=\lambda^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\omega^2\end{bmatrix}$$

2. 由此得出

$$\underset{\sim}{P}_1=\underset{\sim}{V}_c\underset{\sim}{\Sigma}_c=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda/\omega\end{bmatrix}$$

和

$$\underset{\sim}{\tilde{A}}=\underset{\sim}{P}_1^{-1}\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{P}_1=\lambda^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\xi\omega & -\omega^2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\omega\end{bmatrix}\lambda$$

$$=\begin{bmatrix}-2\xi\omega & -\omega\\ \omega & 0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\tilde{C}}=(C_1,C_2)\underset{\sim}{P}_1=(C_1\lambda \quad C_2\lambda/\omega)$$

3. 由 $\underset{\sim}{\tilde{A}}$和 $\underset{\sim}{\tilde{C}}$用(4-5-6)式求 $\underset{\sim}{\tilde{W}}_g^2$，这时(4-5-5)变成

$$\underset{\sim}{\tilde{A}}^T\underset{\sim}{\tilde{W}}_g^2+\underset{\sim}{\tilde{W}}_g^2\underset{\sim}{\tilde{A}}+\underset{\sim}{\tilde{C}}^T\underset{\sim}{\tilde{C}}=0$$

倘记

$$\underset{\sim}{\tilde{W}}_g^2=\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{bmatrix}-2\xi\omega & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-2\xi\omega & -\omega\\ \omega & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda^2C_1^2 & \lambda^2C_1C_2/\omega\\ \lambda^2C_1C_2/\omega & \lambda^2C_2^2/\omega^2\end{bmatrix}=0$$

由此可得四个标量方程，解出 $\underset{\sim}{\tilde{W}}_c^2$，并进而求得它的特征值 $\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g$ 和特征向量 $\underset{\sim}{\tilde{V}}_g$. 我们只直接给出结果：

$$\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}_g^2=\mathrm{diag}(\sigma_1^4,\sigma_2^4)$$

和

$$\underset{\sim}{\tilde{V}}_g=\begin{bmatrix}v_1 & -v_2\\ v_2 & v_1\end{bmatrix}$$

其中

$$\sigma_1^2=\frac{(\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{b}^T)^{1/2}}{4\xi\omega}\left[C_1^2-\frac{C_2^2}{\omega^2}[1-2\xi_i\gamma_i+2\xi_i(1+\gamma_i^2)^{1/2}]\right]^{1/2} \tag{e}$$

$$\sigma_2^2=\frac{(\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{b}^T)^{1/2}}{4\xi\omega}\left[C_1^2-\frac{C_2^2}{\omega^2}[1-2\xi_i\gamma_i-2\xi_i(1+\gamma_i^2)^{1/2}]\right]^{1/2} \tag{f}$$

$$v_1=[(1+v)/2]^{1/2}$$

$$v_2 = [(1 - v)/2]^{1/2}$$

$$v = \text{sign}(\gamma_i)[1 + \gamma_1^2]^{1/2}$$

$$\gamma_i = \frac{\omega C_1}{C_2} - \xi$$

4. 最后求的平衡化系统的系数矩阵为

$$\hat{\underset{\sim}{A}} = \omega \begin{bmatrix} -2\xi v_1^2 & -(1 - 2\xi v_1 v_2)\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} \\ (1 + 2\xi v_1 v_2)\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} & -2\xi v_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underset{\sim}{B}} = \left(\frac{4\xi\omega}{bb^T}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} \sigma_1 v_1 b \\ -\sigma_2 v_2 b \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underset{\sim}{C}}_k = \left(\frac{bb^T}{4\xi\omega}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1}(C_1 v_1 + C_2 v_2/\omega) \\ \sigma_2^{-1}(-C_1 v_2 + C_2 v_1/\omega) \end{bmatrix}$$

其能观能控奇异值为

$$\hat{\underset{\sim}{\Sigma}}_{gk}^2 = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$$

为书写简洁，上面诸式两端诸项都略去了下标 k. 例如 v_1 实应为 v_{1k}，ω 实应为 ω_k.

以上我们介绍了如何将一个渐近稳定系统平衡化得到对应的内部平衡系统.

现在我们进一步讨论如何对内部平衡系统进行降阶，即平衡降阶法.

考虑内部平衡系统$[\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}]$，即

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{u} \tag{4-5-1}$$

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{x} \tag{4-5-2}$$

因为是平衡系统，所以有

$$\underset{\sim}{W}_c^2 = \underset{\sim}{W}_g^2 = \underset{\sim}{\Sigma}_g^2 \tag{4-5-9}$$

其中

$$\underset{\sim}{\Sigma}_g^2 = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_k^2, \cdots, \sigma_N^2)$$

且 $\sigma_1 > \sigma_2 \cdots > \sigma_k \cdots > \sigma_N$. σ_k 称为第 k 阶能观能控奇异值.

我们给出(4-5-1)的脉冲响应，它是由 $u = \delta(t-\tau)$ 引起的当初始条件为 $x_0 = 0$ 时的响应，其中

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{当 } \tau = t \\ 0 & \text{当 } \tau \neq t \end{cases} \tag{4-5-29}$$

是在 $\tau = t$ 时发生的单位脉冲. (4-5-1)的脉冲响应为

$$\underset{\sim}{x}(t) = \int_0^t e^{\underset{\sim}{A}t}\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{u}\,dt = \int_0^t e^{\underset{\sim}{A}t}\underset{\sim}{B}\,\delta(t - \tau)d\tau = e^{\underset{\sim}{A}t}\underset{\sim}{B}$$

相应的脉冲响应观测值为

$$\underset{\sim}{y}(t) = \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{C}\,e^{\underset{\sim}{A}t}\underset{\sim}{B} \tag{4-5-30}$$

取脉冲响应观测值的平方积分作为指标函数 J，即

$$J = \int_0^{\infty} \underset{\sim}{y}^T(t)\underset{\sim}{y}(t)dt \tag{4-5-31}$$

J 的物理意义是脉冲响应能量. 将(4-5-30)代入(4-5-31),得

$$J = \int_0^{\infty} \underset{\sim}{C}\, e^{\underset{\sim}{A}t}\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{B}^T e^{\underset{\sim}{A}^T t}\underset{\sim}{C}^T dt = \underset{\sim}{C}\int_0^{\infty} e^{\underset{\sim}{A}t}\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{B}^T e^{\underset{\sim}{A}^T t}dt\underset{\sim}{C}^T$$

注意(4-5-3),则有

$$J = \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{W}_c^2\underset{\sim}{C}^T \tag{4-5-31}'$$

由于系统是内部平衡的,(4-5-9)可写为

$$\underset{\sim}{W}_c^2 = \underset{\sim}{\Sigma}_R^2 = \mathrm{diag}\{\sigma_1^2,\cdots,\sigma_k^2,\cdots,\sigma_N^2\}$$

于是(4-5-31)′变成

$$J = \sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\underset{\sim}{C}_k\underset{\sim}{C}_k^T \tag{4-5-32}$$

降阶后模型是取 $\underset{\sim}{\Sigma}_R^2$ 中前 r 个能观能控奇异值组成的模型,因此对降阶后模型,我们希望有

$$J_R = \sum_{k=1}^{r}\sigma_k^2\underset{\sim}{C}_k\underset{\sim}{C}_k^T \tag{4-5-33}$$

因此

$$\Delta J = J - J_R = \sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\underset{\sim}{C}_k\underset{\sim}{C}_k^T - \sum_{k=1}^{r}\sigma_k\underset{\sim}{C}_k\underset{\sim}{C}_k^T = \sum_{k=r+1}^{N}\sigma_k\underset{\sim}{C}_k\underset{\sim}{C}_k^T$$

当然

$$J_R \gg \Delta J \tag{4-5-34}$$

是我们期望的降阶模型. (4-5-34)是平衡降阶的准则.

一个更简单的做法就是根据 σ_i 的大小决定该模态的取舍. 对应于小的 σ_i 的模态将较少地受外加控制力 u 的影响,并对输出(观测变量)有较小影响. Spanos 和 Tsuha 称 σ_i 为模态影响系数[69].

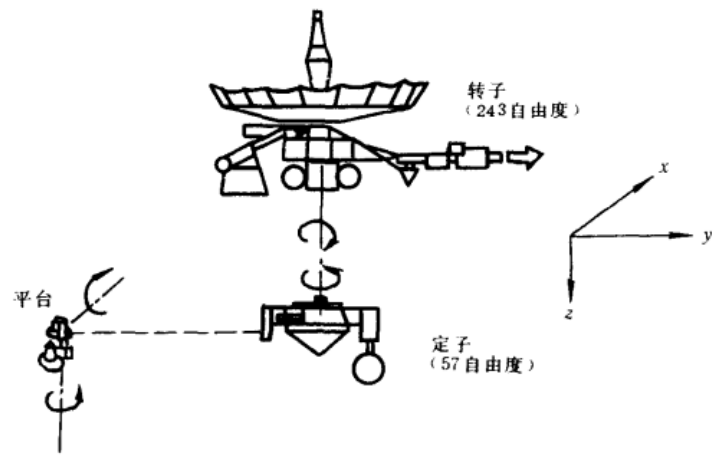


图 4-4 Galileo 飞船分解示意图

Spanos 和 Tsuha 在[69]中报道了用平衡降阶法对 Galileo 飞船进行降阶. Galileo 飞

表 4－4　Galileo 飞船各部件的静子、转子固有频率

序　号	按 Craig-Bampton 法	按 MacNeal-Rubin 法	按 Benfield-Hruda 法	序号	按 Craig-Bampton 法	按 MacNeal-Rubin 法	按 Benfield-Hruda 法
	定子的固有频率(Hz)				转子的固有频率(Hz)		
1	7.09[a]	7.08	7.10	19	4.97	4.97	4.97
2	9.11[a]	9.08	9.11	20	5.02	5.02	5.02
3	10.55[a]	10.54	10.55	21	5.09[a]	5.09	5.09
4	14.56[a]	14.44	14.47	22	5.23[a]	5.23	5.23
5	23.26	39.99	23.25	23	5.45	5.45	5.45
6	25.98[a]	39.41	25.73	24	5.45	5.45	5.45
7	32.52[a]	52.46	27.31	25	5.58	5.58	5.58
8	46.32[a]	56.15	31.69	26	5.58	5.58	5.58
9	57.38[a]	80.82	56.79	27	5.63	5.63	5.63
10	83.18[a]	92.69	59.18	28	5.63	5.63	5.63
11	149.28[a]	152.43	96.46	29	5.65	5.65	5.65
12	211.08[a]	214.72	126.44	30	5.65	5.65	5.65
13	227.73[a]	230.84	201.00	31	5.65	5.65	5.65
14	244.73[a]	273.37	241.10	32	5.65	5.65	5.65
15	268.68[a]	305.07	321.17	33	5.66	5.66	5.66
16	328.50[a]	326.48	772.38	34	5.78	5.78	5.78
				35	5.78	5.78	5.78
	转子的固有频率 (Hz)			36	5.80	5.80	5.80
				37	5.81	5.81	5.81
1	0.14[a]	0.14	0.14	38	5.82	5.82	5.82
2	0.86[a]	0.86	0.86	39	5.82	5.82	5.82
3	1.22	1.22	1.22	40	5.83	5.83	5.83
4	1.23[a]	1.23	1.23	41	5.83	5.83	5.83
5	1.24[a]	1.24	1.24	42	5.83	5.83	5.83
6	1.48[a]	1.48	1.48	43	5.83	5.83	5.83
7	1.52	1.52	1.52	44	5.83	5.83	5.83
8	1.54	1.54	1.54	45	5.83	5.83	5.83
9	1.60	1.60	1.60	46	5.83	5.83	5.83
10	1.72[a]	1.72	1.72	47	5.83	5.83	5.83
11	2.28[a]	2.28	2.28	48	5.83	5.83	5.83
12	2.34	2.34	2.34	49	5.83	5.83	5.83
13	2.80[a]	2.80	2.80	50	5.89	5.89	5.89
14	3.07	3.07	3.07	51	5.99[a]	5.99	5.99
15	3.23	3.23	3.23	52	6.14	6.14	6.14
16	3.23	3.23	3.23	53	6.22	6.22	6.22
17	3.65[a]	3.65	3.65	54	6.86	6.86	6.86
18	4.03[a]	4.03	4.03	55	7.19	7.19	7.19

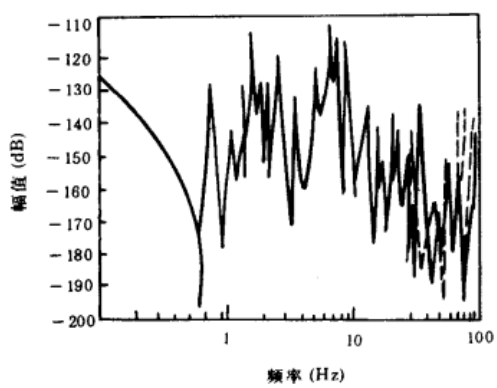
续表 4－4

序　号	按 Craig-Bampton 法	按 MacNeal-Rubin 法	按 Benfield-Hruda 法	序号	按 Craig-Bampton 法	按 MacNeal-Rubin 法	按 Benfield-Hruda 法
	转子的固有频率(Hz)				转子的固有频率(Hz)		
56	10.17	10.17	10.17	66	18.68	18.68	18.68
57	10.30	10.30	10.30	67	19.59	19.59	19.59
58	10.55	10.55	10.55	68	19.59	19.59	19.59
59	13.53	13.53	13.53	69	57.70[a]	58.61	20.97
60	17.09	17.09	17.09	70	58.63[a]	58.76	23.37
61	17.97	17.97	17.97	71	60.53[a]	74.48	23.53
62	18.06	18.06	18.06	72	66.40[a]	85.52	59.19
63	18.08	18.08	18.08	73	75.13[a]	96.31	59.42
64	18.18	18.18	18.18	74	100.30[a]	100.99	72.12
65	18.52	18.52	18.52				

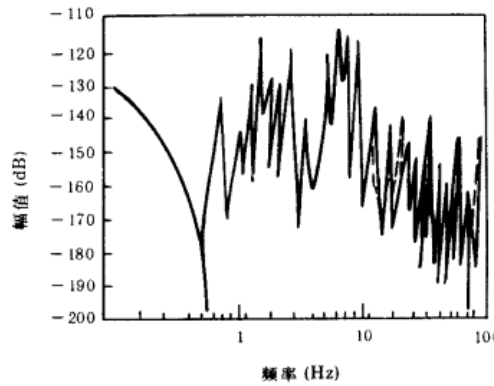
注．a 表示模态影响系数最大者．

船是由柔性转子(Flexible Rotor)，柔性定子(Flexible Stator)和刚性平台(Platform)组成，图 4－4. 由图可见，转子与定子之间可有相对转动；平台通过铰链装在定子上，也可相对于定子有转动. 现在采用有限元素法将转子离散化为 243 个自由度，定子离散化为 57 个自由度，平台作为有 6 个自由度的刚体. 定子和转子的部件模态的一部分给出在表4－4中. 表中给出的是其固有频率值，分别用三种方法进行计算. 请注意三种方法计算结果在低阶时相互吻合良好，在高阶时，有分散性.

现在，拟由部分模态组集一个全系统的整体的降阶模型. 对该低阶模型的主要要求是在各构形下都能在 0—10 Hz 间重现执行器到传感器的频率响应.



实线——全阶数模型
虚线------降阶模型
(转子 74 个模态，定子 16 个模态)



实线——全阶数模型
虚线------平衡降阶模型
(转子 19 个模态，定子 15 个模态)

图 4－5　Galileo 飞船的响应谱

根据这个要求，按引言中曾提到的频率截断准则，倘工作频率为 10 Hz 左右，则模型的截断频率至少两倍于该值；至于部件级的截断频率则应再为模型要求频率的两倍. 这样，对转子来说，几乎要取表 4－4 中所列的 74 个模态的全部. 倘根据定子与转子子系统的能观能控奇异值(模态影响系数)σ_k 的大小，则可只选取表中标有 a 的诸模态. 这里共有 34 个模态(19 个转子模态和 15 个定子模态). 采用降阶模型后的响应值与全阶模型(237＋49 个模态)的响应值的比较见图 4－5. 由图可见在 0－10Hz 范围内，两者惊人地一致.

§6. 模态的选择和分级降阶问题

前面讨论的模态截断准则是在已选定了一组可以用以表达系统位形变量(物理变量)的模态后，具体研究应截取几阶模态. 这一节讨论的是当系统有多种可供选择的模态时，应选择哪一种模态来表达系统的位形变量. 对于一个结构来讲，这样提法是没有意义的，因为它只有一组模态，因而称为结构的固有模态. 对于我们现在讨论的多柔体系统，情况就不同了，它事实上是一个有控条件下的机构. 严格地讲，属于结构动力学范畴里的模态的概念，在这里并不适用. 事实上也只是在一定条件予以借用. 借用条件的不同，就产生了对同一个多柔体系统可能有多组不同可供选用的模态. 当然，随之而来的就是选取哪一类模态的问题.

为说明问题具体起见，我们考虑一个简单的机械臂.

就整个系统而言，在操作过程中，系统的构形是不断变化的，例如图 4－6 中 Ⅰ 及 Ⅱ 就分别以实线和虚线表示机械臂的两个不同的工作位置. 它们分别构成两个不同构形的结构. 根据结构动力学中的概念，一个系统只当构形不变时，即具有几何不可变性质时，才有模态可言. 因此，倘在多柔体系统中借用结构动力学的关于模态的概念时，所谓"系统的模态"只能是对应于某个特定构形，例如图 4－6 的构形 Ⅰ 计算的模态或对应于图 4－6 的构形 Ⅱ 计算的模态. 这种对应于变化中某一时间的特定构形计算的模态，可以想象是在该时间，将各关节都假想地加以锁定，这样得到一个几何不可改变的结构，再根据结构动力学方法求得"结构"的模态. 这样求得的模态，在一些文献中称之为关节锁定时的系统的模态. 对于例如一个多柔体簇系统它的线性化后的动力学方程为

$$
\begin{aligned}
&m_v\ddot{X}-A_{rb}\tilde{S}_v\dot{\omega}-\sum_{j=1}^{N}A_{rj}\tilde{S}_j\dot{\Omega}_j+A_{rb}P_B\ddot{\tau}_B+\sum_{j=1}^{N}A_{rj}P_j\ddot{\tau}_j=Q_x\\
&-\tilde{S}_v^TA_{br}\ddot{X}+J_v\dot{\omega}+H_B\ddot{\tau}_B+\sum_{j=1}^{N}J_{rj}\dot{\Omega}_j+\sum_{j=1}^{N}H_{rj}\ddot{\tau}_j=Q_\varphi\\
&-P_B^TA_{br}\ddot{X}+H_B^T\dot{\omega}+\ddot{\tau}_B+\Lambda_B\tau_B=Q_{\tau B}\\
&-\tilde{S}_j^TA_{jr}\ddot{X}+J_{rj}^T\dot{\omega}+J_j\dot{\Omega}_j+H_j\ddot{\tau}_j=Q_{\psi_j}\\
&P_j^TA_{jr}\ddot{X}+H_{rj}^T\dot{\omega}+H_j^T\dot{\Omega}_j+\ddot{\tau}_j+\Lambda_j\tau_j=Q_{\tau_j}
\end{aligned}
\qquad (4-6-1)
$$

所谓关节锁定的系统模态，指的是在上式中令各系数中所含的转换阵 A_{jk} 有固定值(对应于给定的关节转角)，同时令关节角速度 Ω_j 有关的时间导数值为零，这样根据(4－6－1)式可以求出下式

$$
\begin{aligned}
&m_v\ddot{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{A}_{eb}\tilde{\underset{\sim}{S}}_v\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{A}_{eb}\underset{\sim}{P}_B\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \sum_{j=1}^{N}\underset{\sim}{A}_{ej}\underset{\sim}{P}_j\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j = 0\\
&-\tilde{\underset{\sim}{S}}_v\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{J}_v\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{H}_B\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \sum_{j=1}^{N}\underset{\sim}{H}_{ej}\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j = 0\\
&\underset{\sim}{P}_B^T\underset{\sim}{A}_{be}\ddot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{H}_B^T\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{\Lambda}_B\underset{\sim}{\tau}_B = 0\\
&\underset{\sim}{P}_j^T\underset{\sim}{A}_{je}\ddot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{H}_{ej}^T\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{\Lambda}_j\underset{\sim}{\tau}_j = 0, \quad j = 1,2,\cdots,N
\end{aligned}
\tag{4-6-2}
$$

根据(4-6-2)可求出关节锁定时的系统的模态. 鉴于这是一个"系统"的模态,因此,采取这个模态来对(4-6-1)系统进行模态降阶,是有道理的[26]. 但是要注意的是它是针对着某一特定构形计算的,就是说它是在某一特定的关节角下,假想地将关节加以锁定后求得的模态. 这是它在应用时的局限.

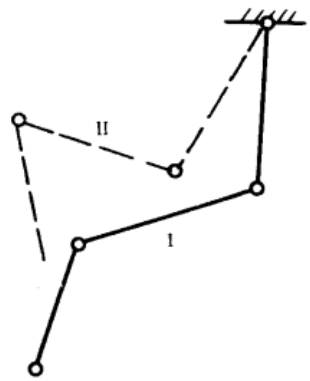


图 4-6 机械臂的两个构形位置

另一个可供使用的模态是所谓关节自由时的系统的模态[26]. 它与上一种的差别是在由(4-6-1)式求定模态时,不使与关节转角有关的时间导数为零. 这样由(4-6-1)式求得的零频率将有 $p+6$ 个. 其中 6 个是系统的刚体模态,而 p 个则是与关节转角(设有 p 个)有关的刚体模态. 这样也可以得到一组系统的模态,不过这时关节角可以自由发生刚体位移,因此称为关节自由时的系统的模态.

第三个可供选用的模态,称为部件模态,又称部件约束模态,有时又称为部件悬臂模态[33,34]. 例如,对于空间机器人,我们可取某个臂杆作为分析对象. 假定该臂杆在内铰处完全被约束住,从而求得某臂杆的一组部件约束模态. 用这个模态来表达该臂杆的弹性位移,自然是合理的. 这样就相当于利用(4-6-1)方程的第三个方程和最后一组方程,但令 $\underset{\sim}{X}$,ω 和 Ω_k 全部为零(即对应于有约束情况)时,由

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_B + \underset{\sim}{\Lambda}_B\underset{\sim}{\tau}_B = 0\\
&\ddot{\underset{\sim}{\tau}}_j + \underset{\sim}{\Lambda}_j\underset{\sim}{\tau}_j = 0 \quad j = 1,2,\cdots,N
\end{aligned}
\tag{4-6-3}
$$

分别求得的模态. 这样做法,概念清楚,计算简单. 不过它没有考虑外接臂杆对它的影响.

第四种可供选用的模态,称为增广体的模态. 增广体是最先由 Fischer 提出,后被

Roberson 及 Wittenburg 用于多刚体系统动力学中的. 一个体的增广体是由该体连同它的外接诸体所组成的，外接诸体都假想地被集中在它们对应的那个外接铰上. 例如图 4－7a 表示一个体 B 分别在铰 5 和铰 8 处各外接了一些物体. 体 B 的增广体如图 4－7b，即分别在铰 5 有集中质量(m_5+m_7)，在铰 8 有集中质量$(m_8+m_9+m_{10})$. 计算增广体 B 的模态时就按图 4－7b 的有集中质量的弹性体进行. 显然增广体与单独一个体的模态是不同的. 一些文献建议采用增广体的模态是认为这样可以适当考虑外接体对部件的影响.

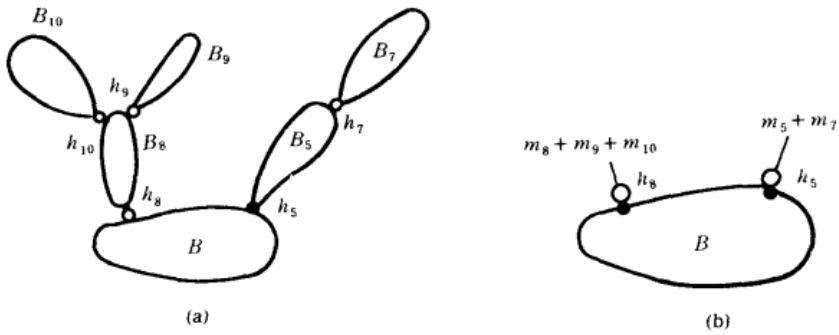


图 4－7　增广体

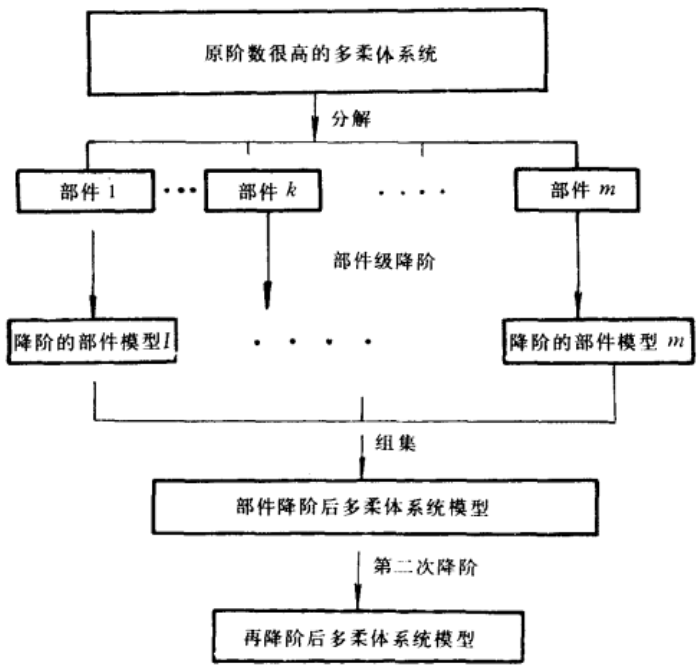


图 4－8　分级降阶策略示意图

虽然有一些文献讨论了模态的选择问题，我们的看法，这种选择事实上还与分析者所

拥有的硬件环境和软件以及降阶策略有关. 当然还和分析者所拟分析的系统规模大小有关.

谈到降阶策略，目前很多文献都建议采用分级降阶的策略[34,69]. 分级降阶的示意图如图 4－8. 就是说，对于一个大的多柔体系统，我们先在部件级进行降阶，这样可以组成一个初步降阶后的系统的动力学方程；再对这个初步降阶后的系统的动力学方程进行第二次降阶，这样可得最后的降阶后动力学方程. 在部件级降阶时，显然可采用上述的第三和第四种模态，即孤立的部件模态或部件的增广体模态. 在第二次降阶时，显然需采用上述的第一种或第二种模态，即关节锁定时的系统模态或关节自由时的系统模态. 在每一级降阶时，除了确定选用哪种模态外，还需根据降阶准则决定要保留多少阶模态. 一般说来，在部件级降阶时，保留的模态要多一点，这样可以保证第二级的模型有更高一些的精度. 在第二级降阶时，保留的模态数目要考虑例如控制系统设计技术的承受能力和激励的特点.

第五章　多柔体系统动力学的几个数值解法

§1. 引　　言

近20年来，力学领域的很多研究人员在多柔体系统动力学方面进行了大量的研究工作. 在各种杂志上、会议上发表了多柔体系统动力学与控制的文章，尤其以航空、航天和机器人领域为著，这些文章可综合为建模和数值模拟两大类. 正如前几章所述，建模方法多种多样，基于不同的力学原理，不同的参考系和变量，其推导过程各异，但就所得多柔体系统动力学方程的最终结果而言，则是殊途同归，都是非线性方程组. 对于非线性方程组的求解不是一件容易的事，要得到封闭的解析解非常困难，有时根本不可能，除非是简单系统或作许多的简化假设. 因而对复杂系统或不允许过多简化时，就只有用数值法求解. 在数值求解的程序中，通常是采用精度较高的标准算法，如高阶的 Runge-Kutta 法，预估-校正的 Adams 法及 Gear 法等. 在某些情况下，可能得到理想的结果；然而在另一些情况下，即使对于线性微分方程组也很难得到好的结果. 从数值方法本身看，其原因有二. 一是由于系统中有快变分量和慢变分量，从而造成数值计算中常遇到的所谓“刚性方程”(Stiff Equation)问题. 这一问题是多柔体系统，尤其是柔性机械臂和空间飞行器动力学研究中经常遇到的. 这种方程的刚性，给数值方法带来一定困难. 下面举一例加以说明：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -2000.0u(t) + 999.75v(t) + 1000.25 \\ \dfrac{dv}{dt} = u(t) - v(t) \end{cases} \tag{5-1-1}$$

其初始条件为 $u(0)=0, v(0)=-2$，可求得该系统的特征值为 $\lambda_1=-2000.5\text{Hz}, \lambda_2=-0.5\text{Hz}$，于是上述系统的解为

$$u(t) = -1.499875e^{-0.5t} + 0.499875e^{-2000.5t} + 1$$

$$v(t) = -2.99975e^{-0.5t} - 0.00025e^{-2000.5t} + 1$$

从上式可以看出含 $e^{-0.5t}$ 项为慢变分量，含 $e^{-2000.5t}$ 的项为快变分量. 它们的和为瞬态解，常数项为稳态解. 虽然，当 $t\to\infty$ 时，$u(t), v(t)$ 都趋于稳态解. 但我们发现快变分量很快趋于零，而慢变分量趋于零的速度则很慢，物理上用时间常数表示衰减速度，这里快变过程的时间常数为

$$\tau_1 = \frac{1}{-\lambda_1} = 1/2000.5 \approx 0.0005$$

当 $t=10\tau_1\approx 0.005$ 秒时，分量 $e^{-2000.5t}$ 已近似于零. 而慢变过程的时间常数为

$$\tau_2 = \frac{1}{-\lambda_2} = 2$$

当 $t=10\tau_2=20$ 秒时，慢变分量 $e^{-0.5t}$ 才近似于零. 这说明它们的变化速度相差很大，所以上述方程是一个刚性方程. 若用 Euler 法求解，由于计算稳定性要求 $|1+\lambda h|<1$，即 $0<h$

$<\frac{2}{-\lambda}$，对快变量 $\lambda_1=-2000.5$，可取 $h=0.001$ 秒，只须要计算 5 步就趋于零，而对慢变分量，若用同样步长要计算到 $t=20$ 秒，即 20000 步才近似于零. 或改用精度较高的 4 阶显式 Runge-Kutta 方法，根据计算稳定性要求，步长仍需满足 $0<h<\frac{2.78}{-\lambda_1}$，即小于0.00138，计算到 $t=20$ 秒，也要 14493 步. 不难看出，当 $|\lambda_1|$ 很大时，要满足稳定性条件，步长必须很小，而慢变分量的 $|\lambda_2|$ 很小，采用同一步长要使 $e^{-\lambda_2 t}\to 0$，则 t 很大，计算步数很多，这就导致计算量很大，而且结果还很不精确.

造成数值算法结果不理想的另一原因是每步计算的舍入误差和截断误差，以及这些误差在以后计算里的传播，前者与时间步长有关，后者与方法的稳定性有关. 从目前的观点来看，这些算法从本质上讲未脱离以位形空间(即欧几里德空间)的切空间中的折线段或曲线段来逼近动力学过程，故在一定条件下，由离散化造成的误差累积现象十分严重，不能保持长时间稳定性的计算. 例如用常见的 4 阶 Runge-Kutta 法解一个简单的振动问题

$$\frac{dq}{dt}=p,\frac{dp}{dt}=-k^2q \tag{5-1-2}$$

若用 0.1 秒为时间步长，计算 20 万步以后，所得结果面目全非. 从物理概念上分析，误差造成了原有结构或系统的约束出现了违约或能量的耗散.

综上所述，寻求一种对时间步长不敏感，计算精度高，而且数值稳定的算法，一直是计算方法研究的主攻方向. 近年来，国内外研究人员在这方面作了大量的工作，取得了许多成果，如适合于求解刚性方程的隐式 Runge-Kutta 法，Gear 法等相继研究成功，并得到广泛应用[120]. 值得注意的是，由我国冯康院士于 1984 提出的辛(symplectic)算法[96—98]，它是基于分析力学中系统解是一个单参数的保测变换(即辛变换)的基本定理. 从此开创了 Hamilton 计算力学的新方法，此方法解决了数值方法的上述长期困惑的难题. 下面将重点介绍多柔体系统动力学的数值求解中常用的高阶隐式 Runge-Kutta 法，Gear 法和最近发展起来的辛算法.

§2. 隐式 Runge-Kutta 法(RK 法)

Runge-Kutta 法是求解初值问题

$$\begin{cases}\underset{\sim}{y}'=\underset{\sim}{f}(t,\underset{\sim}{y}) & \underset{\sim}{y}\in R^m,\underset{\sim}{f}:R^1\times R^m\to R^m\\ \underset{\sim}{y}(t_0)=\underset{\sim}{y}_0\end{cases} \tag{5-2-1}$$

的一类重要的常用算法，显式 RK 法的绝对稳定域是有限区域，因此它不适用于求解刚性很强的方程. 1964 年 Butcher 首先提出了 s 级 $2s$ 阶的隐式 RK 法[13]，1968 年 Ehle 指出这种方法的绝对稳定域包含整个左半平面($R_e(h\lambda)<0$)，可用于求解刚性方程，于是这类方法及其稳定性研究成为数值求解刚性方程的重要研究方向，并已取得了不少成果，本节主要论述隐式 RK 方法的建立.

§2.1 Runge-Kutta 方法的一般形式

求解初值问题(5-2-1)的 s 级方法一般形式为

$$\underset{\sim}{y}_{n+1} = \underset{\sim}{y}_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i \underset{\sim}{k}_i \tag{5-2-2a}$$

$$\underset{\sim}{k}_i = \underset{\sim}{f}\left(t_n + c_i h, \underset{\sim}{y}_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\underset{\sim}{k}_j\right) \quad i = 1,2,\cdots,s \tag{5-2-2b}$$

其中 $t_n = t_0 + nh(n=0,1,2,\cdots)$，$h$ 为积分步长，y_n 为方程(5-2-1)的解 $\underset{\sim}{y}(t_n)$ 的近似，系数 $b_i, c_i, a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,s)$ 均为实数，c_i 称为 RK 方法的节点，b_i 为权系数，$\underset{\sim}{A} = (a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,s)$ 为方法的系数矩阵，通常可将这些系数排列成以下的形式

$$\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{A} \\ \hline & \underset{\sim}{b}^T \end{array} = \begin{array}{c|c} c_1 & a_{11}\quad a_{12}\cdots a_{1s} \\ c_2 & a_{21}\quad a_{22}\cdots a_{2s} \\ \vdots & \vdots \\ c_s & a_{s1}\quad a_{s2}\cdots a_{ss} \\ \hline & b_1\quad b_2\cdots b_s \end{array} \tag{5-2-3}$$

其中 $\underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{b}$ 表示向量，$\underset{\sim}{A}$ 为 s 阶方阵，公式(5-2-2)表示 s 个 $\underset{\sim}{f}(t,y)$ 的值，故称为 s 级隐式 RK 方法，根据相容性条件系数应满足以下条件

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1, \quad c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \quad i = 1,2,\cdots,s \tag{5-2-4}$$

在(5-2-3)式中，如果当 $j \geqslant i$ 时，$a_{ij}=0$，即 $\underset{\sim}{A}$ 为严格的下三角阵，则(5-2-2)就是显式 RK 法，此时 $\underset{\sim}{k}_1 = \underset{\sim}{f}(t_n, \underset{\sim}{y}_n)$，由(5-2-2b)式可逐个递推求出 $\underset{\sim}{k}_2, \cdots, \underset{\sim}{k}_s$. 如果 $j > i$ 时，$a_{ij}=0$，而且对角元素 a_{ii} 不全为零，这时公式称半隐式 RK 方法. 这时(5-2-2b)式中的 $\underset{\sim}{k}_i$ 可表示为

$$\underset{\sim}{k}_i = \underset{\sim}{f}\left(t_n + c_i h, \underset{\sim}{y}_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\underset{\sim}{k}_j + h a_{ii}\underset{\sim}{k}_i\right) \quad i = 1,2,\cdots,s \tag{5-2-5}$$

这是关于 $\underset{\sim}{k}_i \in R^m$ 的 m 维非线性方程组，因此，每步要解 s 个 m 维非线性方程组，若 a_{ii} 均相等，则称为对角隐式 RK 方法，此时由(5-2-5)式求 $\underset{\sim}{k}_i$ 系数矩阵相同，故每步只要求一个 m 阶的非线性方程组的解，一般隐式 RK 方法(5-2-2b)的右端包含全部 $\underset{\sim}{k}_1, \underset{\sim}{k}_2, \cdots \underset{\sim}{k}_s$，故由(5-2-2b)求 $\underset{\sim}{k}_1, \underset{\sim}{k}_2, \cdots, \underset{\sim}{k}_s$ 需要解一个 $(s \times m)$ 维的非线性方程组. 由此可见，一般的隐式 RK 方法比显式方法计算复杂得多，但它具有左半平面的绝对稳定性和其它稳定性，阶数又高，可用于解刚性方程.

为了得到隐式 RK 公式，需要确定公式的系数 $\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{A}$. 一种有效方法是 Taylor 展开方法. 为方便起见，将(5-2-2)式改写成

$$\underset{\sim}{y}_{n+1} = \underset{\sim}{y}_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i \underset{\sim}{f}(t_n + c_i h, \underset{\sim}{Y}_i)$$

$$\underset{\sim}{Y}_i = \underset{\sim}{y}_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\underset{\sim}{f}(t_n + c_j h, \underset{\sim}{Y}_j), i = 1,2,\cdots,s \tag{5-2-6}$$

若取 $t_{n+1} = t_n + h$，并假定 $\underset{\sim}{y}(t_n) = \underset{\sim}{y}_n$，(5-2-6)式将得到的数值解 $\underset{\sim}{y}_{n+1}$ 与方程(5-2-1)的精确解 $\underset{\sim}{y}(t_{n+1})$ 之差为 $\underset{\sim}{L}_{n+1}$. 当 $h \to 0$ 时，如果有最大整数 $p > 0$，使

$$\underset{\sim}{L}_{n+1} = \underset{\sim}{y}(t_{n+1}) - \underset{\sim}{y}_{n+1} = 0(h^{p+1}) \tag{5-2-7}$$

称方法(5-2-2)是 $p(\geqslant 1)$ 阶相容. 当 $p=1$ 时，(5-2-4)式成立. 对显式 RK 方法 $p \leqslant$

s，当 $s\leqslant 4$ 时，$p=s$. 对隐式 RK 方法 $p\leqslant 2s$，最高阶 $p=2s$，这说明对同一级的 RK 方法，隐式的阶比显式高得多. 如果方程(5－2－1)的解 $y(t)$ 是 $p+1$ 阶可微，则 $y(t_{n+1})$ 在 t_n 处做 Taylor 展开. 由(5－2－7)比较 h 同阶项系数，则可求出 p 阶公式的 $\underline{b}$，$\underline{C}$，$\underline{A}$ 满足的关系式，从而求出系数 $\underline{b}$，$\underline{C}$，$\underline{A}$. 这种方法对建立隐式 RK 公式仍然是可行的，只是当 p 较大时展开式很繁杂，因此使用较少，通常采用 Butcher 基于数值求积公式的方法建立隐式的 RK 公式.

§2.2 基于数值求积的隐式 RK 方法

通常推导求解方程(5－2－1)的数值积分公式时，只对单个方程，即 $m=1$ 的情形讨论，然后再将公式推广到 $m>1$ 的情形. 对 $m=1$，将方程(5－2－1)从 t_n 到 t_{n+1} 积分得

$$y(t_{n+1})-y(t_n)=\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y(t))dt \tag{5-2-8}$$

若用插值求积公式近似右端积分，当插值节点为 s 个时得到

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y(t))dt\approx h\sum_{i=1}^{s} b_i f(t_n+c_ih,y(t_n+c_ih))$$

其中 $c_i\in[0,1]$ 为求积公式节点，b_i 为求积系数. 若令 $y(t_n)=y_n$，$Y_i\approx y(t_n+c_ih)$，$y_{n+1}\approx y(t_{n+1})$，由(5－2－8)式可得

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{s} b_i f(t_n+c_ih,Y_i)$$

若对(5－2－1)式积分从 t_n 到 t_n+c_ih，则有

$$y(t_n+c_ih)-y(t_n)=\int_{t_n}^{t_n+c_ih} f(t,y(t))dt\quad i=1,2,\cdots,s \tag{5-2-9}$$

上式右端积分时仍用 $t_n+c_ih(i=1,2,\cdots,s)$ 为节点，用插值求积公式近似，此时求积公式系数为 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,s)$，于是由(5－2－9)可得到

$$Y_i=y_n+h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}f(t_n+c_ih,Y_j)\quad i=1,2,\cdots,s$$

这说明利用数值求积公式可以得到隐式 RK 公式(5－2－6)，现将数值求积方法用于下列方程：

$$y'=f(t)\quad y(t_n)=0 \tag{5-2-10}$$

积分时令 $t=t_n+xh$，当 $t\in[t_n,t_{n+1}]$，$x\in[0,1]$ 时有

$$y(t_{n+1})=h\int_0^1 f(t_n+xh)dx\approx h\sum_{i=1}^{s} b_i f(t_n+c_ih) \tag{5-2-11}$$

其中 c_i 为求积节点，b_i 为求积系数. 求积公式具有 $q-1$ 次代数精确度，即指对次数小于 $q-1$ 次的代数多项式，公式(5－2－11)精确成立. 如果取 $f(t_n+xh)=(xh)^{k-1}$，$k=1,\cdots,q$，则(5－2－11)精确成立，于是有

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{k-1}=\frac{1}{k}\quad k=1,2,\cdots,q \tag{5-2-12}$$

而当 $f(t_n+xh)=(hx)^q$ 时(5－2－11)不精确成立，此时有

$$L_{n+1}=y(t_{n+1})-y_{n+1}=o(h^{q+1}) \tag{5-2-13}$$

若对方程(5－2－10)从 t_n 到 $t_{n,i}=t_n+c_ih(i=1,2,\cdots,s)$ 求积，则得

$$y(t_n,i) = h\int_0^{c_i} f(t_n + xh)dx$$

对右端积分应用插值求积公式，若插值节点取为 $x_j=c_j(j=1,2,\cdots,s)$，有

$$\int_0^{c_j} f(t_n + xh)dx \approx \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_n + c_j h), i = 1,2,\cdots,s \qquad (5-2-14)$$

这里 a_{ij} 为求积公式系数，若要求(5－2－14)对 $f(t_n+xh)=(hx)^{k-1}\quad k=1,2,\cdots,s$ 精确成立，则有

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{1}{k} c_i^k \quad i,k = 1,2,\cdots,s \qquad (5-2-15)$$

当 $c_i(i=1,2,\cdots s)$ 确定后，由(5－2－15)式则可求得系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,s)$，在(5－2－12)及(5－2－15)中，当 $k=1$ 时，则得(5－2－4)的相容性条件，它对任何 $p\geqslant s\geqslant 1$ 都成立.

于是计算 s 级 $2s$ 阶的隐式 RK 方法系数 $\underset{\sim}{C},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{A}$ 的步骤为

a) 求公式(5－2－11)中[0,1]上的 s 次 Legendre 多项式 $P_s^*(t)=0$ 的 s 个根 $c_1,c_2,\cdots,c_s$

b) 求 $k=1,2,\cdots,s$ 由(5－2－12)的线性方程组求系数 $b_1,b_2,\cdots,b_s$

c) 对 $i=1,2,\cdots,s$ 由(5－2－15)令 $k=1,2,\cdots,s$ 成立，求出 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,s)$

§3. Gear 方法及改进

对刚性的非线性系统

$$\frac{d\underset{\sim}{y}}{dt} = \underset{\sim}{f}(t,\underset{\sim}{y}) \qquad (5-3-1)$$

用数值求解，一般是用向后差分方法形成差分公式

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j \underset{\sim}{y}_{n+k} = h\underset{\sim}{f}_{n+k} \qquad (5-3-2)$$

但这个公式过去很少被采用，主要原因是它只有 k 阶精度，而 k 步的 Adams-Moulton 方法却有 $k+1$ 阶精度，另外它仅当 $k\leqslant 6$ 时才满足渐近稳定性条件. 1968 年 Gear 指出了这个公式具有刚性稳定性，用它求解刚性方程效果较好. 并用此公式编制了求解刚性方程的程序包[24]，它具有自动变步长和变阶的特点. 1972 年 Brayton 等人又提出了更加有效的变步长方法. 下面将概略地介绍一下此方法. 为了说明方便，将(5－3－2)改写为

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \underset{\sim}{y}_{n+j} = h\beta_k \underset{\sim}{f}_{n+k} \quad \alpha_k = 1, \beta_k \neq 0 \qquad (5-3-3)$$

用算子 $\underset{\sim}{L}[\underset{\sim}{y}(t_n),h]$ 的 Taylor 直接展开，并用线性多步法的公式求出 k 阶精度的 k 步法系数 $\alpha_j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 及 β_k 满足的方程，即

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1} + 1 = 0\\
&\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (k-1)\alpha_{k-1} + k = \beta_k\\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
&\frac{1}{k!}[\alpha_1 + 2^k\alpha_2 + \cdots + (k-1)^k\alpha_{k-1} + k^k] = \frac{k^{k-1}}{(k-1)!}\beta_k
\end{aligned} \qquad (5-3-4)$$

当 $k=1$ 时，得 $\alpha_0=-1,\beta_1=1$，就是向后差分的 Euler 公式

$$\underset{\sim}{y}_{n+1} = \underset{\sim}{y}_n + h\underset{\sim}{f}_{n+1}$$

当 $k=2$ 时，由(5－3－4)式得

$$\alpha_0 + \alpha_1 + 1 = 0,\ \alpha_1 + 2 = \beta_2,\ \frac{1}{2}\alpha_1 + 2 = 2\beta_2$$

解得

$$\alpha_1 = -\frac{4}{3},\ \alpha_0 = \frac{1}{3},\ \beta_2 = \frac{2}{3}$$

于是得到 $k=2$ 的向后差分公式

$$\underset{\sim}{y}_{n+2} = \frac{4}{3}\underset{\sim}{y}_{n+1} - \frac{1}{3}\underset{\sim}{y}_n + \frac{2}{3}h\underset{\sim}{f}_{n+2}$$

如上所作，可解出 k 为 3,4,5,6 的向后差分公式的各系数.

关于变步长，令可变步长 $h_{n+j}=t_{n+j}-t_{n+j-1}=\nabla t_{n+j}$，$j=1,2,\cdots,k$；通过 $k+1$ 个点 $(t_{n+j},\underset{\sim}{y}_{n+j})$，$j=0,1,\cdots,k$ 的插值多项式记作 $\underset{\sim}{P}_k(n+k,t)$，由 k 阶 k 步向后差分公式(5－3－3)定义的斜率 $\underset{\sim}{y}'_{n+k}$ 作为 k 次多项式 $\underset{\sim}{P}(n+k,t)$ 在 $t=t_{n+k}$ 处的导数，这样就有

$$\underset{\sim}{y}'_{n+k} = \underset{\sim}{P}'_k(n+k,t_{n+k}) = -\frac{1}{h_{n+k}}\sum_{j=0}^{k}\delta_j\underset{\sim}{y}_{n+j}$$
$$= \underset{\sim}{f}(t_{n+k},\underset{\sim}{y}_{n+k}) \qquad (5-3-5)$$

这里系数 $\delta_j(j=0,1,\cdots,k)$ 是依赖于插值点的距离 $h_{n+j}(j=1,2,\cdots k)$.

为了得到解非线性方程组(5－3－5)的 Newton 法初始近似 $\underset{\sim}{y}^{(0)}_{n+k}$，以及局部截断误差估计，可通过 $k+1$ 个点 $(t_{n+j-1},\underset{\sim}{y}_{n+j-1})$，$j=0,1,\cdots,k$ 的 k 次插值多项式给出一个显式的预估值

$$\underset{\sim}{y}^{(0)}_{n+k} = \underset{\sim}{P}_k(n+k-1,t_{n+k}) = \sum_{j=0}^{k}\gamma_j\underset{\sim}{y}_{n+j-1} \qquad (5-3-6)$$

其中系数 $\gamma_j(j=0,1,\cdots,k)$ 依赖于 h_{n+j}，$j=0,1,\cdots,k$.

系数 δ_j 和 γ_j，$j=0,1,\cdots,k$ 可以从方程(5－3－5)及(5－3－6)对所有次数小于等于 k 的多项式 $\underset{\sim}{P}(x)$ 精确成立，得到满足 $k+1$ 个条件的线性方程组

$$\underset{\sim}{H}_k(n,t_{n+k})\underset{\sim}{\delta} = \underset{\sim}{e}_2 \qquad (5-3-7)$$

$$\underset{\sim}{H}_k(n-1,t_{n+k})\underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{e}_1 \qquad (5-3-8)$$

其中 $\underset{\sim}{\delta}^T=(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_k)$，$\underset{\sim}{\gamma}^T=(\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_k)$，$\underset{\sim}{e}_1^T=(1,0,0,\cdots,0)$，$\underset{\sim}{e}_2^T=(0,1,0,\cdots,0)$，$\underset{\sim}{H}_k$ 是 Vandermonde 矩阵，其元素

$$[\underset{\sim}{H}_k(m,t_{n+k})]_{ij} = \left(\frac{t_{n+k}-t_{m+j}}{h_{n+k}}\right)^i,\quad i,j=0,1,\cdots,k \qquad (5-3-9)$$

Gear 是用局部截断误差 $h_{n+k}\underset{\sim}{d}_{n+k}$ 来控制步长的大小，其中

$$\underset{\sim}{d}_{n+k} = \frac{1}{t_{n+k}-t_{n-1}}(\underset{\sim}{y}_{n+k} - \underset{\sim}{y}^{(0)}_{n+k}) + \underset{\sim}{o}(h^{k+1}_{n+k}) \qquad (5-3-10)$$

即根据局部截断误差不超过某个数来控制每个积分步长.

变阶是在变步长方法基础上同时进行的，在 k 阶公式做了 $k+1$ 步后才能实行变阶，还要估计 $k-1,k,k+1$ 阶向后差分公式的截断误差，这些估计在变步长逼近时要增加计算 $k-1$ 步和 $k+1$ 步在 t_{n+k} 处的预测值，根据在同一点的误差估计确定是否需要变阶，原

则上，若用低阶公式能达到精度要求则尽量用低阶公式，如果在给定的 h_{n+k} 所有 $k-1$，k，$k+1$ 阶三个误差均不满足要求，则应缩小步长，然后再重新计算.

§4. 辛算法的概念和算式

前两节介绍了多柔体系统动力学中由于方程的“刚性”而常采用的两种数值解法. 对某些问题，在比较小的步长情况下，可以得到满意的结果. 然而在某些情况下则不然，例如本章开始叙述的那种问题. 此外有些问题在 Lagrange 体系中并不容易处理，象旋转机械动力学，多柔体系统动力学中的刚体模态和柔性变形之间的耦合作用及非惯性系中的动力学等问题. 其主要原因是在动力学方程中出现了陀螺力矩阵和非线性项. 要求解其系统的固有频率、固有模态用常规方法就不易处理. 用数值方法求响应时，虽针对方程的“刚性”研究了多种不同的算法，然而对步行机器人或长时间控制的飞行器，由于积分时间过长，上述常规算法所得结果往往面目全非. 其主要原因是常规的 Lagrange 体系的算法本质上是一种“耗散”算法，即在积分过程中，每一步的截断误差和舍入误差及每步产生的误差在以后各步中传播，都会影响计算的结果和收敛. 前者与积分步长有关，后者取决于算法本身的稳定性. 随着积分时间的增长，其累积误差也在增加. 从物理意义上来讲，误差就相当于在系统上附加了“广义力”，使系统的能量耗散，从而出现违约情况和所得结果偏离真解. 为了克服上述困难，有些人采用补偿的办法，但问题在于很难确定每一步的补偿量. 补偿不当有时还可能适得其反. 故必须寻找一种更精确的算法.

对上述问题已有一种比较理想的算法，即辛算法. 这是冯康院士首先提出，目前正在日益发展，其基本理论是：一切无耗散的真实物理过程都能表达成 Hamilton 体系，研究 Hamilton 力学离不开辛几何，而 Hamilton 力学的计算离不开辛算法. 下面将简单地介绍一下辛算法的有关基本概念和一些应用. 有关详细的论述请参见[96—99].

§4.1 辛几何

辛是英文词 Symplectic 的简译，英文原意是两样东西共存之意. 辛几何的历史可追溯到 19 世纪英国天文学家 Hamilton，他为了研究牛顿力学，引进广义坐标和广义动量来表示系统的运动量，得到 Hamilton 函数，从而推出 Hamilton 原理. 对于一个 n 自由度系统，它的 n 个广义坐标和 n 个广义动量就张成 $2n$ 维相空间，于是，牛顿力学就成为相空间的几何学. 用现代观点来看，这是一种辛几何学. 随后 Jacobi，Darboux，Poincare，Cartan，Weyl 从代数的与几何的不同角度对它进行了讨论和研究. 但是，现代辛几何的兴起，应该说是从 50 年代中到 60 年代初 KAM (Kolmogorov，Arnold，Moser) 定理建立开始的. 在 70 年代，由于研究 Fourier 积分算子，几何量子化与群表示论，临界点分类，李代数对偶空间上的 Hamilton 系统的需要，人们对辛几何作了大量的研究(Arnold，Duistermatt，Guillemin，Weinstein，Marsden)，从而推动了这个研究领域的发展. 进入 80 年代后，整体辛几何的研究相继出现，如硬辛几何的研究(Gromov)，辛映射不动点的研究(Arnold 猜测) (Conley-Zehnder)；矩映射凸性的研究(Ariyah，Gullemin-Sternberg). 看来，不仅辛几何本身的研究是极其丰富而有生命力的，而且它的应用领域极其广泛，如天体力学，几何光学，等离子物理，流体力学，弹性力学，多体力学及最优控制等.

Hamilton 系统的一个重要问题就是稳定性问题. 这类问题在几何上的特点是:它的解在相空间上是保测的,其特征方程的根是纯虚数,所以不能用 Poincare,Liapunov 渐近稳定性理论,而必须用 KAM 定理加以研究,是一种关于整体稳定性的论断,这是牛顿力学发展史上重大的突破.

辛几何与通常的位形空间的欧几里德几何有什么区别呢? 概括起来讲欧氏几何是研究长度的几何学,而辛几何是研究面积的几何学,其主要区别是

欧氏几何	辛几何
R^n 元 $\underset{\sim}{x}^T=(x_1,\cdots,x_n)$	R^{2n} 元 $\underset{\sim}{x}^T=(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots,x_{2n})$
内积$(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\underset{\sim}{x}^T\underset{\sim}{I}_n\underset{\sim}{y}$	$[\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}]=\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{n+i}-x_{n+i}y_i)=\underset{\sim}{x}^T\underset{\sim}{J}_{2n}\underset{\sim}{y}$
其中 $\underset{\sim}{I}_n=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$	其中 $\underset{\sim}{J}_{2n}=\begin{bmatrix}0 & \underset{\sim}{I}_n\\ -\underset{\sim}{I}_n & 0\end{bmatrix}$
(1)$(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})$ 表示长度	(1)$[\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}]=x_1y_2-x_2y_1=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$ 表示面积
(2) 对称性 $\underset{\sim}{A}^T=\underset{\sim}{A}$	(2) 反对称性 $\underset{\sim}{K}^T=-\underset{\sim}{K}$
(3) 正交基$(\underset{\sim}{e}_i,\underset{\sim}{e}_j)=\delta_{ij}$	(3) 辛基$(\underset{\sim}{e}_1,\cdots,\underset{\sim}{e}_n,\underset{\sim}{f}_1,\cdots,\underset{\sim}{f}_n)$
$\underset{\sim}{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T$	$[\underset{\sim}{e}_i,\underset{\sim}{e}_j]=0$
$\underset{\sim}{e}_2=(0,1,\cdots,0)^T$	$[\underset{\sim}{f}_i,\underset{\sim}{f}_j]=0$
$\cdots$	$[\underset{\sim}{e}_i,\underset{\sim}{f}_j]=[\underset{\sim}{f}_j,\underset{\sim}{e}_i]=\delta_{ij}$
$\underset{\sim}{e}_n=(0,0,\cdots1)^T$	$\underset{\sim}{e}_1=(1,0,\cdots,0,0,\cdots,0)^T$
	$\cdots$
	$\underset{\sim}{e}_n=(0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)^T$
	$\underset{\sim}{f}_1=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$
	$\cdots$
	$\underset{\sim}{f}_n=(0,0,\cdots,0,0,0,\cdots,1)^T$
(4)(x,y) 双线性	(4)$[\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}]$ 双线性
(5) 对称性$(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})=(\underset{\sim}{y},\underset{\sim}{x})$	(5) 反对称性$[\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}]=-[\underset{\sim}{y},\underset{\sim}{x}]$
(6) 非退化 $\forall\ \underset{\sim}{y}\neq0$,	(6) 非退化$\forall\ \underset{\sim}{y}\neq0,\exists x$
$(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})\neq0\Rightarrow\det\underset{\sim}{I}\neq0$	$[\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}]\neq0\Rightarrow\det\underset{\sim}{J}\neq0$
$\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}\in R^n$	$\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}\in R^{2n}$

辛空间　设 $\underset{\sim}{V}$ 是定义在实域 R 上的向量空间,在 $\underset{\sim}{V}\times\underset{\sim}{V}$ 上定义一个双线性 ω,我们称它为辛的,如果满足下列性质:

(1)非退化　$\forall\ \underset{\sim}{x}\in\underset{\sim}{V},st,\omega(x,y)=0$

$\forall\ \underset{\sim}{y}\in\underset{\sim}{V}\Rightarrow x=0$

(2)斜对称　$\forall\ \underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}\in\underset{\sim}{V},\omega(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})=-\omega(\underset{\sim}{y},\underset{\sim}{x})$,则称$(\underset{\sim}{V},\omega)$为辛空间,$\omega$ 为辛结构.

辛流形　流形 M 上的一个非退化的闭外微分 2 -型 ω 称为 M 上的一个辛结构(M, ω)称为辛流形.

最普通的辛流形是(R^{2n},J),R^{2n}上的辛 2 -型是

$$\omega(\underset{\sim}{z}_1,\underset{\sim}{z}_2)=\underset{\sim}{z}_1^T\underset{\sim}{J}_{2n}\underset{\sim}{z}_2$$

任何一个辛流形的维数一定是偶数.

Darboux 定理 1　任何一个辛流形都局部同胚于(R_{2n},J),即在 M 的任一点领域里存在着局部坐标 $p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots q_n$ 使得

$$\omega(\delta p_j,\delta q_j)=\delta_{ij}$$

$$\omega(\delta p_i,\delta p_j)=\omega(\delta q_i,\delta q_j)=0$$

因此研究辛几何局部问题,我们都可在(R^{2n},J)中进行.

Darboux 定理 2　辛空间上的一个线性变换 $\underset{\sim}{S}$是辛的充分必要条件,为

$$\underset{\sim}{S}^T\underset{\sim}{J}\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{J}$$

其中 $\underset{\sim}{S}^T$ 是 $\underset{\sim}{S}$的转置.

§4.2 Hamilton 力学与辛算法

一切守恒的真实物理过程都能表成适当的 Hamilton 体系,它们的共同基础是辛几何,故研究 Hamilton 力学离不开辛几何,其计算离不开辛算法.

这里首先讨论线性系统,因非线性系统求解十分复杂,即使对体系本身的性质也还未搞清楚,而且非线性系统的求解往往采用线性系统的解法为基础,再进一步迭代求解. 动力学中常见的运动方程是

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{x}}+\underset{\sim}{G}\dot{\underset{\sim}{x}}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{R}(t) \tag{5-4-1}$$

其中,$\underset{\sim}{x}$是 n 维的向量,是时间 t 的待求函数,$\underset{\sim}{M}$,$\underset{\sim}{G}$,$\underset{\sim}{K}$是 $n\times n$ 的定常矩阵,$\underset{\sim}{M}$是质量阵,通常为对称正定. $\underset{\sim}{K}$是刚度阵,对称,不一定正定. 当 $\underset{\sim}{G}$为对称非负阵时,即为通常理解的阻尼阵. 当 $\underset{\sim}{G}$为反对称阵时,它的意义是陀螺力矩阵. 当 $\underset{\sim}{G}$为一般矩阵时,总可以分解为对称与反对称矩阵之和,于是它就是阻尼与陀螺力矩阵之和. $\underset{\sim}{R}(t)$是外干扰力向量,它往往是已知的. 若初始状态已知,便构成了常微分方程(5 - 4 - 1)的适定问题,对它的求解已有了丰富的经验.

方程(5 - 4 - 1)只有一类变量 $\underset{\sim}{x}$,解释为位移或广义位移,这相当于 Lagrange 体系. 对方程(5 - 4 - 1)按照分析力学中的 Hamilton 体系的标准方法可写为

$$\delta\int L(\underset{\sim}{x},\dot{\underset{\sim}{x}})dt=\underset{\sim}{R}(t) \tag{5-4-2}$$

其中,Lagrange 函数 $L(\underset{\sim}{x},\dot{\underset{\sim}{x}})=\frac{1}{2}\dot{\underset{\sim}{x}}^T\underset{\sim}{M}\dot{\underset{\sim}{x}}+\frac{1}{2}\dot{\underset{\sim}{x}}^T\underset{\sim}{G}\underset{\sim}{x}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{x}^T\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{x}$,则 Hamilton 正则方程可表为

$$\delta\int[\underset{\sim}{p}^T\dot{\underset{\sim}{x}}-\underset{\sim}{H}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{p})]dt=\underset{\sim}{R}(t) \tag{5-4-3}$$

式中

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{H}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{p})&=\underset{\sim}{p}^T\dot{\underset{\sim}{x}}-L(\underset{\sim}{x},\dot{\underset{\sim}{x}})\\&=\frac{1}{2}\underset{\sim}{x}^T\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{x}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{p}^T\underset{\sim}{\Gamma}\underset{\sim}{p}+\underset{\sim}{p}^T\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{x}\end{aligned}$$

其中

$$\underset{\sim}{p}=\underset{\sim}{M}\dot{\underset{\sim}{x}}+\frac{1}{2}\underset{\sim}{G}\underset{\sim}{x},\quad \underset{\sim}{Q}=\underset{\sim}{K}-\underset{\sim}{G}\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{G}/4$$

$$\underset{\sim}{F}=-\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{G}/2,\quad \underset{\sim}{\Gamma}=\underset{\sim}{M}^{-1} \tag{5-4-4}$$

于是，代替方程(5-4-3)，有对偶方程组

$$\dot{\underset{\sim}{x}}=\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\Gamma}\underset{\sim}{p}$$

$$\dot{\underset{\sim}{p}}=-\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{F}^{T}\underset{\sim}{p}+\underset{\sim}{R}(t) \tag{5-4-5}$$

令

$$\underset{\sim}{v}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{x}\\ \underset{\sim}{p}\end{Bmatrix} \tag{5-4-6}$$

则

$$\dot{\underset{\sim}{v}}=\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{v}+\underset{\sim}{R}(t) \tag{5-4-7}$$

其中

$$\underset{\sim}{H}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{F} & -\underset{\sim}{\Gamma}\\ -\underset{\sim}{Q} & -\underset{\sim}{F}^{T}\end{bmatrix}$$

为 Hamilton 矩阵，其特点是

$$\underset{\sim}{J}\underset{\sim}{H}=\begin{bmatrix}-\underset{\sim}{Q} & -\underset{\sim}{F}^{T}\\ -\underset{\sim}{F} & \underset{\sim}{\Gamma}\end{bmatrix} \tag{5-4-8}$$

为一对称阵，式中

$$\underset{\sim}{J}=\begin{bmatrix}0 & \underset{\sim}{I}_{n}\\ -\underset{\sim}{I}_{n} & 0\end{bmatrix},\quad \underset{\sim}{J}^{2}=-\underset{\sim}{I}_{2n},\quad \underset{\sim}{J}^{T}=\underset{\sim}{J}^{-1}=-\underset{\sim}{J} \tag{5-4-9}$$

这正是辛几何的辛基.

1. 线性 Hamilton 体系特征解

为求含有陀螺力系统或非惯性系中的动力学系统的固有频率和固有模态，可令方程(5-4-7)中的外干扰力 $\underset{\sim}{R}(t)=0$，从而得到自由振动的运动方程为

$$\dot{\underset{\sim}{v}}=\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{v} \tag{5-4-10}$$

对方程(5-4-10)用分离变量法求解，得本征方程

$$\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{\Psi}=\mu\underset{\sim}{\Psi} \tag{5-4-11}$$

其中 $\underset{\sim}{H}$ 是 $2n$ 阶 Hamilton 矩阵. 根据其特征，可推证出方程(5-4-11)的 $2n$ 个特征值有如下特点：若 μ 为特征值，则 $-\mu$ 亦为特征值. 因此，$2n$ 个特征值可分成以下两组：

α 组：$R_e(\mu_i)>0$ 或 $R_e(\mu_i)=0$ 且 $I_m(\mu_i)>0$

β 组：$\mu_{i+n}=-\mu_i$，　　$i=1,2,\cdots,n$

共有 n 对特征解，其相应的特征向量为 $\underset{\sim}{\Psi}_i$，$\underset{\sim}{\Psi}_{n+i}$ 共 n 对，向量 $\underset{\sim}{\Psi}_i$ 与 $\underset{\sim}{\Psi}_{n+i}$ 仍是互相共轭的特征解. 互不共轭的解之间有

$$\underset{\sim}{\Psi}_i^{T}\underset{\sim}{J}\underset{\sim}{\Psi}_j=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n \text{ 或 } n+1,n+2,\cdots,2n \tag{5-4-12}$$

的辛正交关系，并且还有共轭辛归一的关系

$$\underset{\sim}{\Psi}_i^{T}\underset{\sim}{J}\underset{\sim}{\Psi}_{n+j}=\delta_{ij}\qquad i,j=1,2,\cdots,n \tag{5-4-13}$$

或

$$\underset{\sim}{\Psi}_{n+i}^{T}\underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{\Psi}_{j}=-\delta_{ij}\qquad i,j=1,2,\cdots,n \tag{5-4-14}$$

将这些特征向量作为列，组成 $2n\times 2n$ 矩阵 $\underset{\sim}{\Psi}$，即

$$\underset{\sim}{\Psi}=[\underset{\sim}{\Psi}_{1},\underset{\sim}{\Psi}_{2},\cdots,\underset{\sim}{\Psi}_{n},\underset{\sim}{\Psi}_{n+1},\underset{\sim}{\Psi}_{n+2},\cdots,\underset{\sim}{\Psi}_{2n}] \tag{5-4-15}$$

根据共轭辛正交归一关系，显然有

$$\underset{\sim}{\Psi}^{T}\underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{\Psi}=\underset{\sim}{J} \tag{5-4-16}$$

这说明 Ψ 矩阵恰是一个辛矩阵.

由于 Hamilton 矩阵的特征解矩阵是辛矩阵，它的行列式值为 1，因此，其 $2n$ 个特征向量必定线性无关，这表明以这些特征向量为基底可以张成 $2n$ 维全空间，所以任一个全状态向量皆可以用这些特征向量的线性组合来表示，即

$$\underset{\sim}{v}(t)=\sum_{i=1}^{n}[a_i\underset{\sim}{\Psi}_{i}+b_i\underset{\sim}{\Psi}_{n+i}] \tag{5-4-17}$$

将上式代入(5-4-11)，利用辛正交归一关系，分别左乘以 $\underset{\sim}{\Psi}_{i}^{T}\underset{\sim}{J}$ 及 $\underset{\sim}{\Psi}_{n+i}^{T}\underset{\sim}{J}$ 有

$$\begin{aligned}\dot{b}_i&=\mu_{n+i}b_i=-\mu_i b_i\\ \dot{a}_i&=\mu_i a_i\end{aligned} \tag{5-4-18}$$

这样微分方程组便最大限度地解耦了. 这相当于对称振动时的模态展开法.

求解系统对初始激励的响应，就变得十分简单，只须将方程(5-4-18)积分一次，即

$$\begin{aligned}a_i&=a_{i0}e^{\mu_i t}\\ b_i&=b_{i0}e^{-\mu_j t}\end{aligned} \tag{5-4-19}$$

至于系数 a_{i0} 和 b_{i0}，则由初始条件确定，即可由 $\dot{\underset{\sim}{x}}_0$ 和 $\underset{\sim}{x}_0$ 确定 $\underset{\sim}{v}_0$，然后再利用式(5-4-17)来确定 a_{i0} 和 b_{i0}.

2. 暂态历程的精细时程积分

时程积分是广泛关心的问题，虽然暂态分析通常要处理非线性或时变系统，但其基础仍应首先精细地将线性时不变系统的计算搞好，然后就可以用各种方法去处理较复杂的问题.

①线性系统

对形式如(5-4-1)的动力学方程，采用变换有

$$\dot{\underset{\sim}{v}}=\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{v}+\underset{\sim}{f} \tag{5-4-20}$$

式中

$$\underset{\sim}{f}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{R}\end{Bmatrix},\qquad \underset{\sim}{v}_0\text{ 为已知}$$

此时，并不要求 $\underset{\sim}{Q}$ 反对称，$\underset{\sim}{K}$ 为对称，$\underset{\sim}{H}$ 也不一定是 Hamilton 矩阵.

对这样方程的直接积分，以往逐步积分总是采用显式的中心差分法或隐式的 Newmark 法，Wilson-θ 法及 Runge-Kutta 法，Gear 法等，重要一点是积分步长选取. 对于显式法，步长应当选为系统最小周期的若干分之一，以保证其收敛，对于隐式积分，则步长可适当地予以放宽，但过长的积分时间则引起能量的耗散. 而采用精细的时间历程积分法，就可以将这些长期以来令人困惑的问题解决.

因为 $\underset{\sim}{H}$ 是常矩阵，则齐次方程的通解为

$$\underset{\sim}{v} = \exp(\underset{\sim}{H}, t)\underset{\sim}{v}_0 \tag{5-4-21}$$

现在令逐步积分时间步长为 τ，于是有

$$\underset{\sim}{v}_k = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{v}_{k-1} \quad k = 1,2,\cdots \tag{5-4-22}$$

其中 $$\underset{\sim}{T} = \exp(\underset{\sim}{H}, \tau)$$

文献[98]已经给出了指数矩阵的精细算法，其要点是利用指数矩阵加法定理. 它可以表示为

$$\exp(H, \tau) = [\exp(\underset{\sim}{H}, \tau/m)]^m \tag{5-4-23}$$

其中 m 是任一整数，对此可选用

$$m = 2^N$$

例如，$N=20$，则 $m=1048576$，由于时间步长 τ 本来是不大的时间区段，所以 $\Delta t = \tau/m$ 是非常小的一个时间区段. 因此，可以采用 Taylor 展开

$$\exp(\underset{\sim}{H}, \Delta t) \approx \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{T}_a \tag{5-4-24}$$

$$T_a = \underset{\sim}{H}\,\Delta t + (\underset{\sim}{H}\,\Delta t)^2 \times [\underset{\sim}{I} + (\underset{\sim}{H}\,\Delta t)/3 + (\underset{\sim}{H}\,\Delta t)^2/12]/2$$

其中，$\underset{\sim}{T}_a$ 是一个非常小的矩阵，现在对 $\underset{\sim}{T}$ 阵作分解

$$\underset{\sim}{T} = (\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{T}_a)^{2^N} = (\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{T}_a)^{2^{(N-1)}} \times (\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{T}_a)^{2^{(N-1)}} \tag{5-4-25}$$

这种分解一直做下去，共 N 次. 这样从 $(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{T}_a)$ 开始，进行 $N=20$ 次矩阵乘法就可以算得 $\underset{\sim}{T}$ 阵，该法称为 2^N 类算法. 由于 $\Delta t = \tau/m$ 的区段极小，$\underset{\sim}{T}_a$ 的误差几乎已在双精度的十进制 16 位有效数字之外，因此，根据 2^N 类算法，对于 $\underset{\sim}{T}$ 阵的计算是非常准的，故称为精细积分过程.

在算出 $\underset{\sim}{T}$ 阵以后，就可考虑非齐次方程的逐步积分. 假定非齐次项在时间间隔 (t_k, t_{k+1}) 之内为线性变化，即

$$\dot{\underset{\sim}{v}} = \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{r}_0 + \underset{\sim}{r}_1(t - t_k)$$

当 $t=t_k$ 时，$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_k$，式中 $\underset{\sim}{r}_0$ 和 $\underset{\sim}{r}_1$ 是给定的向量，利用叠加原理可解得

$$\underset{\sim}{v}_{k+1} = \underset{\sim}{T}[\underset{\sim}{v}_k + \underset{\sim}{H}^{-1}(\underset{\sim}{r}_0 + \underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{r}_1)] - \underset{\sim}{H}^{-1}(\underset{\sim}{r}_0 + \underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{r}_1 + \underset{\sim}{r}_1\tau) \tag{5-4-26}$$

这就是有非齐次项时的精细时程积分公式.

据文献[98]介绍，利用上述精细积分公式，所得结果令人满意，在前几位有效数字与精确解相同，而且对时间步长在合理的范围内并不敏感. 这是因为每个时间步长 τ 内又分为 1048576 步. 所以，即使 τ 为最短周期的 100 倍，那么，真正的步长 Δt 仍只有 0.0001 周期. 这是足够小的，这样也就不在乎系统的“刚性”问题. 更重要的是，上述积分是在辛空间内做的，它不会引起积分过程发散.

②非线性系统

上面对于 $\underset{\sim}{H}$ 为定常矩阵时，建立了精细积分法，然而有许多实际问题，需要求解非线性或时变系统. 例如带大型柔性附件展开的飞行器动力学问题就是如此. 但精细积分法对这类问题并非完全无能为力，非线性振动的一般问题十分复杂，研究工作还在深入. 下面就 $\underset{\sim}{H}$ 阵可表达为

$$\underset{\sim}{H}(v) = \underset{\sim}{H}_0 + \underset{\sim}{H}_1(v)v \tag{5-4-27}$$

的形式，其中 $\underset{\sim}{H}_0$ 是定常矩阵，而 $\underset{\sim}{H}_1$ 相比 $\underset{\sim}{H}_0$ 是比较小的情形进行探讨，为此，动力学方程可表达为

$$\dot{\underset{\sim}{v}} = \underset{\sim}{H}_0\underset{\sim}{v} + (\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{H}_1\underset{\sim}{v}), \quad \text{且 } \underset{\sim}{v}(0) = \underset{\sim}{v}_0 \tag{5-4-28}$$

上式中将非线性项 $\underset{\sim}{H}_1(v)\underset{\sim}{v}$ 已合并到非齐次项中了，这样便有利于写出积分方程，进行数值求解．令

$$\underset{\sim}{\Phi}(t) = \exp(\underset{\sim}{H}_0 t) \tag{5-4-29}$$

这是齐次方程 $\dot{\underset{\sim}{\Phi}} = \underset{\sim}{H}_0\underset{\sim}{\Phi}$，$\underset{\sim}{\Phi}(0) = \underset{\sim}{I}$ 的解，显然有

$$\underset{\sim}{\Phi}(t_1 + t_2) = \underset{\sim}{\Phi}(t_1)\underset{\sim}{\Phi}(t_2) \tag{5-4-30}$$

于是，非齐次方程的解可表达为

$$\underset{\sim}{v}(t) = \underset{\sim}{\Phi}(t)\underset{\sim}{v}_0 + \int_0^t \underset{\sim}{\Phi}(t - t_1)(\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{H}_1\underset{\sim}{v})dt_1 \tag{5-4-31}$$

式中，待求向量函数 $\underset{\sim}{v}$ 也出现在方程的右侧的积分号下，因此是一个积分方程.

然而，积分方程的上述形式不利于数值求解，对此，可以改变形式，以利于采用逐步积分法，将时间划分为步长为 τ 的一系列时刻

$$t_0 = 0, t_1 = \tau, \cdots, t_k = k\tau \cdots$$

设已求出 t_k 时的响应，$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_k$，于是利用(5-4-30)式，可将 $t > t_k$ 时的(5-4-31)式写成

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{v}(t) &= \underset{\sim}{\Phi}(t - t_k)\underset{\sim}{\Phi}(t_k)\underset{\sim}{v}_0 + \int_0^{t_k} \underset{\sim}{\Phi}(t - t_k)\underset{\sim}{\Phi}(t_k - t_1)(\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{H}_1\underset{\sim}{v})dt_1 \\ &\quad + \int_{t_k}^t \underset{\sim}{\Phi}(t - t_1)(\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{H}_1 v)dt_1 \\ &= \underset{\sim}{\Phi}(t - t_k)\underset{\sim}{v}_k + \int_{t_k}^t \underset{\sim}{\Phi}(t - t_1)(\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{H}_1\underset{\sim}{v})dt_1\end{aligned} \tag{5-4-32}$$

上式表明寻求 t_k 以后的 $\underset{\sim}{v}$，可以将 t_k 当作起点，这是初值问题的特征．至此尚未引入近似，以下对被积函数 $(\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{H}_1\underset{\sim}{v})$ 在区段 (t_k, t_{k+1}) 内引入近似

$$\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{H}_1\underset{\sim}{v} \approx r_0 + \underset{\sim}{r}_1(t - t_k) \tag{5-4-33}$$

这样，利用(5-4-26)式，可以写出 $\underset{\sim}{v}_{k+1}$ 的算式

$$\underset{\sim}{v}_{k+1} = \underset{\sim}{T}[\underset{\sim}{v}_k + \underset{\sim}{H}_0^{-1}(\underset{\sim}{r}_0 + \underset{\sim}{H}_0^{-1}\underset{\sim}{r}_1)] - \underset{\sim}{H}_0^{-1}(\underset{\sim}{r}_0 + \underset{\sim}{H}_0^{-1}\underset{\sim}{r}_1 + \underset{\sim}{r}_1\tau) \tag{5-4-34}$$

式中，$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{\Phi}(\tau)$ 为已知，上式右端的 $\underset{\sim}{r}_1$ 和 $\underset{\sim}{v}_{k+1}$ 是有关系的，因此(5-4-34)式就是对于 $\underset{\sim}{v}_{k+1}$ 的非线性方程．对这个方程可以采用迭代法求解，然后再推进到 $\underset{\sim}{v}_{k+2}$ 等.

③辛 Runge-Kutta 法

对于完整保守系统的 Hamilton 正则方程，可通过像上面所述的方程，建立 Hamilton 函数求偏导数得出．但非完整系统的 Hamilton 函数与所谓 Lagrange 逆问题有关，要找到一函数，使之可以写成拉氏二类方程的形式，并非易事．而对完整的非保守系统，则可令动能势函数对广义坐标的偏导数为相应的广义动量，并将广义坐标导数以广义动量代换，则原来的拉氏第二类方程组获得降阶，成为方程数目增加一倍的一阶方程组——正则方程，可见文献[99].

对正则方程的数值求解，可用上述的精细积分的方法，也可用在辛几何下各种常用积分算法，例如 Runge-Kutta 法，在这方面冯康院士领导的研究小组做了许多工作，现仅介绍单步 s 阶 Runge-Kutta 方法，其算法可表示为

$$\underset{\sim}{z}_{k+1}=\underset{\sim}{z}_k+\tau\sum_{k=1}^{s}b_i\underset{\sim}{f}(Y_i)$$

$$\underset{\sim}{Y}_i=\underset{\sim}{z}_k+\tau\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\underset{\sim}{f}(Y_j)\quad(1\leqslant i\leqslant s)\tag{5-4-35}$$

这里 $\tau=t_{k+1}-t_k(k\geqslant 0)$，$b_i$ 为权系数，$\underset{\sim}{A}=(a_{ij})\quad(i,j=1,2,\cdots,s)$，称为方法的系数矩阵，且满足条件 $c_j=\sum_{j=1}^{s}a_{ij}(i=1,2,\cdots,s)$，于是上式可由如下的系数矩阵来描述

$\underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{A}$
	$\underset{\sim}{b}^T$

其中，$\underset{\sim}{C}$，$\underset{\sim}{b}$ 表示列向量，如果 $\underset{\sim}{A}$ 是一个主对角元素均为零的严格下三角阵，相应的方法称为显式的，如果 $\underset{\sim}{A}$ 是一个主对角元素为非零的下三解形矩阵，则称其为半隐式的，如果矩阵 $\underset{\sim}{A}$ 为一般的 s 阶矩阵. 相应的公式称为隐式的.

记矩阵 $\underset{\sim}{B}=\mathrm{diag}[b_1,b_2,\cdots,b_s]$，则

$$\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{B}-\underset{\sim}{b}\,\underset{\sim}{b}^T\tag{5-4-36}$$

可以证明，若选择系数 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{b}$ 使 $\underset{\sim}{M}=0$，则格式(5-4-35)是辛格式，辛格式能保持系统的所有能量守恒.

如 4 阶 2 步隐格式为

$\underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{A}$
	$\underset{\sim}{b}^T$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\underset{\sim}{z}_{n+1}=\underset{\sim}{z}_n+\frac{\tau}{2}(\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{Y}_1)+\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{Y}_2))$$

$$\underset{\sim}{Y}_1=\underset{\sim}{z}_n+\tau\left(\frac{1}{4}\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{Y}_1)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{Y}_2)\right)$$

$$\underset{\sim}{Y}_2=\underset{\sim}{z}_n+\tau\left(\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{Y}_1)+\frac{1}{4}\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{Y}_2)\right)\tag{5-4-37}$$

根据不同的要求，可以构造出相应的计算格式.

第六章　约束多体系统动力学理论方法及应用

§1. 引　　言

近年来，随着复杂机构的发展与应用，机器人和机械臂系统的深入研究，尤其是多个系统协调工作中的协调动力学与控制问题的研究，约束多体系统动力学的理论方法又得到了许多研究者的广泛与系统的研究[43,58,77,78,81]. 下面的几个实际例子说明可以模化为约束多体系统动力学与控制问题，一个机器人对工件进行抛光、打毛刺或进行焊接作业，其手端的运动轨迹是预先设计的运动轨迹[109]，因此其动力学问题可以模化为受约束的多体系统动力学问题。如果机器人系统的机座是沿一个固定导轨运动的话，这样的系统亦为约束多体系统，另外一个例子是双机械臂抓取一个物体，然后运到另一个地点，搬运过程中的两个机械臂的爪端与所持物体共同运动，这样的动力学问题也可归结为约束多体系统动力学的问题[106,108,110].

约束多体系统动力学的理论方法可以采用Lagrange力学的处理方法，这是常规的研究方法，一些《高等动力学》的专著中均可查到，本书在第三章中曾利用Lagrange力学中的Lagrange乘子法给出了约束多体系统动力学方程. 然而，当系统的构形和约束变得非常复杂时，直接采用Lagrange力学的处理方法会遇到很大的困难，主要是理论公式推演的复杂性与计算机程序编排的不规则性. 因此，近年来发展了一些其它的处理方法，文献[81]把待定乘子引进到Kane方程中来处理约束多体系统动力学问题，取得了很大的进展，本书作者结合国家自然科学基金项目“多个系统协调动力学与控制研究”，在前人研究工作的基础上，发展了两类研究约束多体系统动力学问题的处理方法，其一为约束多体系统动力学的d'Alembert-正交补方法[107,108]，其二为约束多体系统动力学的Newton-Euler正交法[58,77,78,109]. 本书作者将上述两类处理方法较系统地总结在本章之中。结合有关双机械臂协调动力学问题，复杂的机器人系统的建模问题，本章还将给出一些关于这两类处理方法的具体理论推演公式和计算实例，另外，在本章末尾还给出了多机械臂捕捉公共目标的协调关节轨迹规划问题的分析与计算实例.

§2. 约束多体系统动力学的d'Alembert-正交补方法

为叙述d'Alembert-正交补方法的基本思路，我们这里考虑的约束多体系统是由刚体组成，且约束为理想约束，更详细和具体的多体链的约束动力学描述和方程见下一节.

设多体系统中各个物体的位形坐标为u_1，u_2，…，u_n，所受的约束写成如下形式：

$$\sum_{s=1}^{n} A_{rs}du_s + B_r dt = 0 \qquad r = 1,2,\cdots,m < n \tag{6-2-1}$$

其中A_{rs}，B_r均为位形与时间的函数. 由A_{rs}组成的矩阵A为满秩矩阵，即上面的约束组是相互独立的. u_s的虚位移必须满足

$$\sum_{s=1}^{n} A_{rs}\delta u_s = 0 \qquad r = 1,2,\cdots,m \tag{6-2-2}$$

或写成矩阵形式

$$\underline{A}\,\delta\underline{U} = 0 \tag{6-2-3}$$

式中 $\delta\underline{U}^T = (\delta u_1,\cdots,\delta u_s,\cdots,\delta u_n)$.

再设系统上受有广义主动力向量 $F^T = (F_1,\cdots,F_s,\cdots,F_n)$，这里的系统的含义是广义主动力在 u_s 方向的分量．我们直接应用虚功原理，由于我们所考虑的约束为理想约束，而且系统全由刚体组成，因而有

$$\delta W_e + \delta W_I = 0 \tag{6-2-4}$$

这里 δW_e 和 δW_I 分别是外力虚功和惯性力虚功．上式可写成一种简化的方程

$$\delta\underline{U}^T(\underline{F} - \underline{M}\,\underline{U}) = 0 \tag{6-2-5}$$

上式表达虚功原理的物理意义是虚位移矢量与动力学矢量相正交．由于(6-2-5)式中虚位移不是独立的，受(6-2-3)式控制，因此不能直接通过(6-2-5)求出位形 $\underline{U}$．原则上，可以采用 Lagrange 力学中的乘子法来研究这样的问题，详见第三章．本章通过约束方程(6-2-3)的 $\underline{A}$ 矩阵的正交补矩阵 $\underline{C}$ 作一变换，将 $\delta u_s(s=1,\cdots,n)$ 用 $n-m$ 个相互独立的虚位移 $\delta Z''_i(i=1,2,\cdots,n-m)$ 来表达，然后求解变换后的虚功原理的方程，获得约束多体系统动力学问题的解答，我们称之为约束多体系统动力学的 d'Alembert-正交补方法．

为此首先构造矩阵

$$\underline{G} = \underline{A}^T\underline{A} \tag{6-2-6}$$

其中 $\underline{A}^T$ 为 $\underline{A}$ 的转置矩阵．由(6-2-1)知 $\underline{G}$ 为 $n\times n$ 阶方阵，$\underline{A}$ 矩阵的秩为 m．因此，由 $|\lambda\underline{E}-\underline{G}|=0$ 可求得 $\underline{G}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\neq 0$，而 $\lambda_{m-1}=\lambda_{m+2}=\cdots=\lambda_n=0$，把对应于 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的特征向量按列构成一矩阵

$$\underline{L} = [\underline{C}' \vdots \underline{C}] \tag{6-2-7}$$

其中 $\underline{C}'$ 是与 $\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_m$ 所对应的特征向量构成的 $n\times m$ 矩阵，$\underline{C}$ 是 $\lambda_{m+1},\lambda_{m+2},\cdots,\lambda_n$ 诸零特征值所对应的特征向量构成的 $n\times(n-m)$ 矩阵．由于 $\underline{G}$ 为实对称矩阵，故 $\underline{L}$ 必定为满秩矩阵．

令如下变换

$$\delta\underline{U} = \underline{L}\,\delta\underline{Z} \tag{6-2-8}$$

其中

$$\delta\underline{Z} = \begin{bmatrix}\delta\underline{Z}'\\ \delta\underline{Z}''\end{bmatrix} \tag{6-2-9}$$

$\delta\underline{Z}'$ 是 m 阶列阵，$\delta\underline{Z}''$ 是 $(n-m)$ 阶列阵．

由于 $\underline{L}$ 为满秩矩阵，故 $\delta\underline{U}$ 和 $\delta\underline{Z}$ 之间存在一个单值的一一对应关系．

将(6-2-8)式代入(6-2-3)式得

$$\underline{A}\,\underline{L}\,\delta\underline{Z} = 0 \tag{6-2-10}$$

或写成

$$\underline{A}\,\underline{C}'\delta\underline{Z}' + \underline{A}\,\underline{C}\,\delta\underline{Z}'' = 0 \tag{6-2-11}$$

(6-2-11)式已将 $\delta\underline{Z}$ 分解为 $\delta\underline{Z}'$ 与 $\delta\underline{Z}''$ 两项之和．现在我们考虑矩阵 $\underline{A}\underline{C}$ 的基本特征．由(6-2-7)式知 $\underline{C}$ 是 $(n-m)$ 列矩阵，它的各列分别是由矩阵 $\underline{G}$ 的特征值 $\lambda_{m+1}=\lambda_{m+2}=\cdots=$

$\lambda_n=0$ 的特征向量构成，故有

$$G\,C=0 \tag{6-2-12}$$

把 $G=A^TA$ 代入到上式得

$$A^TA\,C=0$$

左乘 C^T 于上式，有

$$C^TA^TA\,C=0 \quad 或 (A\,C)^TA\,C=0$$

故有

$$A\,C=0 \tag{6-2-13}$$

我们称 C 矩阵为 A 矩阵的正交补. 显然虚位移的控制方程(6-2-11)中的 $\delta Z''$ 怎样取值都成立，因为 $AC=0$. 这样(6-2-11)式又可写成

$$A\,C'\delta Z'=0 \tag{6-2-14}$$

AC' 为 $m\times m$ 阶方阵，C' 为与 $G=A^TA$ 的非零特征值 $\lambda^T=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\}$ 对应的特征向量阵，因而有矩阵形式的特征方程满秩矩阵. 由

$$G\,C'=C'\lambda$$

$$A^TA\,C'=C'\lambda \tag{6-2-15}$$

故推得 A^TAC' 的秩为 m. 又由 A^T 的秩为 m，得 AC' 的秩为 m，且 AC' 为 $m\times m$ 阶方阵，因此得：

$$|A\,C'|\neq 0 \tag{6-2-16}$$

结合(6-2-16)和(6-2-14)推出，使(6-2-14)式成立的条件为：

$$\delta Z'=0 \tag{6-2-17}$$

应用 $G=A^TA$ 的特征值与特征向量，获得了 A 矩阵的正交补 C 矩阵，且 $AC=0$，另外又获得条件(6-2-17)，这样已把 δZ 分解为独立的 $\delta Z''$ 和强制条件 $\delta Z'=0$，使得 δU 用独立的 $\delta Z''$ 表达.

于是(6-2-8)可写成

$$\delta U=C\,\delta Z'' \tag{6-2-18}$$

把上式代入到虚功原理获得的方程(6-2-5)，得

$$\delta Z''C^T(F-M\ddot{U})=0 \tag{6-2-19}$$

由于 $\delta Z''$ 的任意性，我们可得

$$C^T(F-M\ddot{U})=0 \tag{6-2-20}$$

上述为 $n-m$ 个方程，再结合 m 个约束方程(6-2-1)，即可求解 n 个位形 U. 式(6-2-1)又可以写成

$$\Sigma A_{rs}\frac{du_s}{dt}+B_r dt=0 \qquad r=1,2,\cdots,m$$

或

$$A\,\dot{U}=-B \tag{6-2-21}$$

其中 $B^T=(B_1,B_2,\cdots,B_m)$，再将上式对时间求导，得

$$A\,\ddot{U}=-\dot{B}-\dot{A}\,\dot{U} \tag{6-2-22}$$

我们称方程组 (6-2-21) 和方程组 (6-2-20) 为约束多体系统动力学的 d'Alembert -

正交补方程组，这种处理方法称为 d'Alembert -正交补方法.

如果把 Lagrange 力学的 Lagrange 乘子法和 Kane 方程的 Kane 乘子法看作研究约束多体系统动力学的第一类方法的话，我们认为 d'Alembert -正交补方法可以看作研究约束多体系统动力学的第二类方法. 从这两大类研究方法的基本思路来看，第一类方法是含有待定乘子的方程，整个求解未知量增加，第二类方法不含特定乘子的方程的个数与系统位形数相同. 文献[107]对这两类求解方法的计算机程序编排与数值误差问题进行了深入细致的分析，并指出，对于第一类方法，随着积分时间增加，误差会愈来愈大，因此精度较低，容易发散；第二种方法，数值积分相对稳定一些，但需要求出正交补矩阵 C. 从适合计算机编程来看，第二种方法优于第一种方法.

§3. 约束多体链的运动学和动力学方程

上一节简要叙述了 d'Alembert -正交补方法的基本思路，下面将这种研究方法直接应用于约束多体链系统.

§3.1 几类系统的约束多体动力学模型

1. 多体链系统的末端按规定路径运动问题

这类问题在实际应用的各类复杂机构及机器人系统中常见，如曲柄连杆机构端点所受约束的运动问题；机械臂和机器人进行抛光、打毛刺和焊接作业，其爪端是按规定路径运动的；多个机械臂系统协调工作的第一个阶段就是各臂爪端按设计要求接近被抓物体. 这样的问题可以模化为如图 6-1 所示的系统，即简化为一个单链的机械臂系统，但其末端有一个运动规律已知的约束，因此可以采用约束多体系统动力学的处理方法研究其动力学特性.

2. 双机械臂或多机械臂协调搬运物体问题

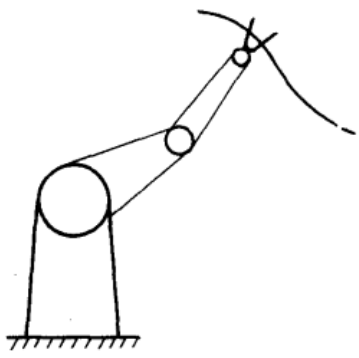


图 6-1 单机械臂模型图

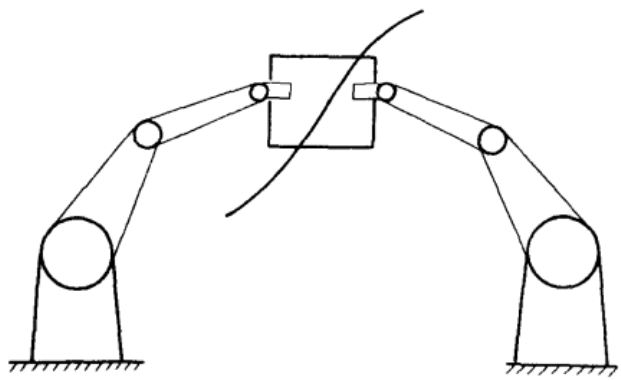


图 6-2 双机械臂模型图

这类问题也是典型的约束多体系统动力学问题，以双机械臂为例，其示意图见图 6-2. 如果把爪端与物体看作一体，此系统可以模化为中间体受到约束的闭链系统. 一般来

讲，两个机械臂搬运的公共物体是一种协调的运动约束问题，而将两机械臂的根部看作受到几何约束的问题.

§3.2 约束多体链的运动学描述

本节中的约束多体链是刚体和柔体的混合系统. 其运动学的描述以图 6－3 所示的无根链系统为例，由于推导过程与本书前几章的相同，这里仅给最后的结果表达式.

图 6－3 所示，H_1 为虚铰，物体编号依次为 B_1，B_2，…，B_n，H_k 是物体 B_k 的内铰，e_I 为惯性参考系，系统中的铰为球铰.

1. 单个物体的坐标

物体 B_k 上建立了两套连体坐标系 e_k 和 $e_{(k)}$，分别以物体 B_k 的内铰和外铰为原点，见图 6－4.

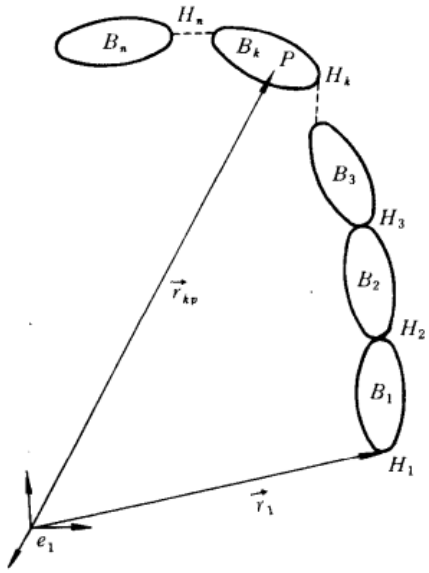


图 6－3 无根链示意图

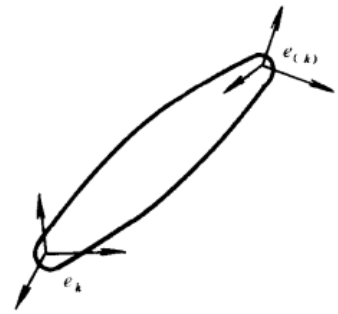


图 6－4 单体示意图

2. 两相邻物体间的运动学关系

设 $\vec{\Omega}_k$，$\vec{\phi}_k$ 和 $\vec{\omega}_k$，$\vec{\psi}_k$ 分别是 e_k 相对于 $e_{(k-1)}$的相对角速度、相对角位移和 e_k 相对于惯性坐标系 e_1 的绝对角速度和绝对角位移，它们均在 e_k 中描述，见图 6－5. 同时设 $\vec{a}_k$，$\vec{a}_k$ 分别是 $e_{(k)}$相对于 e_k的弹性转角速度和角位移，均在 e_k 中描述，引入 IS 来识别刚体或弹性体. 于是

$$\vec{\omega}_k = \vec{\omega}_{k-1} + \vec{\Omega}_k + IS_{k-1}\vec{a}_{k-1} \quad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{6-3-1}$$

重复利用这个递推关系，且引入选择函数

$$H_1(i) = \begin{cases} 1 & i \geqslant 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases} \quad 和 \quad H_2(i) = \begin{cases} 0 & i \geqslant 0 \\ 1 & i < 0 \end{cases} \tag{6-3-2}$$

显然

$$H_1(i) + H_2(i) = 1$$

及

$$\sum_i H_1(k-i) - \sum_i H_2(i-k) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \tag{6-3-3}$$

从而推得

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_k &= \sum_{j=1}^{k} \vec{\Omega}_j + \sum_{j=1}^{k-1} IS_j \dot{\vec{a}}_j \\ &= \sum_j H_1(k-j)\vec{\Omega}_j \\ &\quad + \sum_j H_2(j-k) IS_j \dot{\vec{a}}_j \end{aligned} \tag{6-3-4}$$

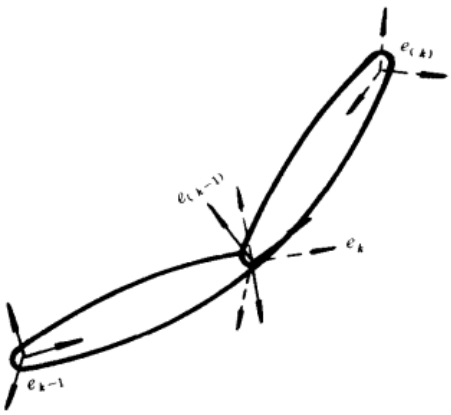


图 6-5　相邻两体示意图

3. B_k 体内铰的位置矢量

设 $\vec{r}_k$ 为自惯性系坐标 e_1 原点至 H_k 的矢量，在 e_1 中描述；$\vec{l}_k$ 为 B_k 体未变形时的内铰 H_k 至外铰 H_{k+1}的矢量，在 e_k 中描述；$\vec{d}_k$ 为 B_k 体变形前 H_{k+1}铰到变形后 H_{k+1}铰的矢量，在 e_k 中描述，如图 6-6 所示.

显然

$$\vec{r}_k = \vec{r}_1 + \sum_j H_2(j-k)(\vec{l}_j + IS_j\vec{d}_j) \tag{6-3-5}$$

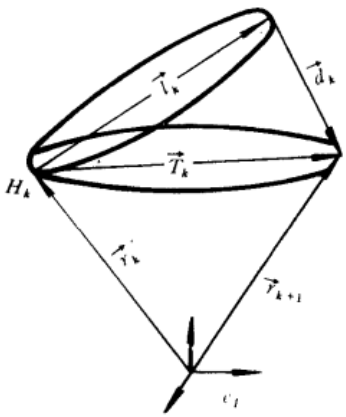


图 6-6　单体变形图

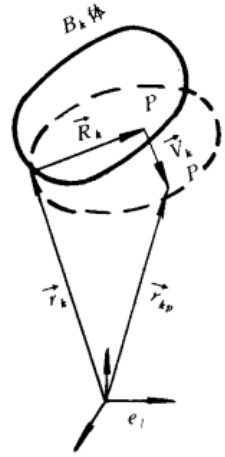


图 6-7　单体变形图

4. B_k 体的速度矢量

如图 6-7 所示，设 P 为 B_k 体上任意一点，$\vec{r}_{kp}$为惯性坐标系原点至 P 点的矢量，则

$$\vec{r}_{kp} = \vec{r}_k + \vec{R}_k + IS_k\vec{V}_k$$

$$= \vec{r}_1 + \sum_j H_2(j-k)(\vec{l}_j + IS_j\vec{d}_j) + \vec{R}_k + IS_k\vec{V}_k \tag{6-3-6}$$

式中 $\vec{R}_k$ 为 B_k 体未变形时 H_k 至 P 点的向径；$\vec{V}_k$ 为 P 点在 B_k 体变形后的位移. 各矢量均在 e_k 中描述.

对（6-3-6）式在惯性参考系中对时间求导，并应用（6-3-4）式，得

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_{kp} = {} & \dot{\vec{r}}_1 + \sum_m H_1(k-m)(\vec{\Omega}_m + IS_m\dot{\vec{a}}_m) \times [\vec{l}^{\,m}_{mk} + (IS\vec{d})^m_{mk} + \vec{R}_k + IS_k\vec{V}_k] \\ & - \sum_m H_2(m-k)IS_m\dot{\vec{a}}_m \times (\vec{l}_m + IS_m\vec{d}_m) + \sum_m H_2(m-k)IS_m\dot{\vec{d}}_m \\ & - IS_k\dot{\vec{a}}_k \times (\vec{R}_k + IS_k\vec{V}_k) + IS_k\dot{\vec{V}}_k \end{aligned} \tag{6-3-7}$$

其中

$$\vec{l}^{\,m}_{mk} = \sum_j H_2(j-k)H_1(j-m)\vec{l}_j = \sum_{j=m}^{k-1}\vec{l}_j$$

$$(IS\vec{d})^m_{mk} = \sum_j H_2(j-k)H_1(j-m)IS_j\vec{d}_j = \sum_{j=m}^{k-1}IS_j\vec{d}_j$$

进一步求导数，得

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_{kp} = {} & \ddot{\vec{r}}_1 + \sum_m H_1(k-m)(\dot{\vec{\Omega}}_m + IS_m\ddot{\vec{a}}_m) \times [\vec{l}^{\,m}_{mk} + (IS\vec{d})^m_{mk} + \vec{R}_k + IS_k\vec{V}_k] \\ & + \sum_m H_1(k-m)(\vec{\omega}_m \times \vec{\Omega}_m + \vec{\omega}_m \times IS_m\dot{\vec{a}}_m) \times [\vec{l}^{\,m}_{mk} + (IS\vec{d})^m_{mk} + \vec{R}_k \\ & + IS_k\vec{V}_k] - \sum_m H_2(m-k)(\vec{\omega}_m \times IS_m\dot{\vec{a}}_m + IS_m\ddot{\vec{a}}_m) \times (\vec{l}_m + IS_m\vec{d}_m) \\ & - (\vec{\omega}_k \times IS_k\dot{\vec{a}}_k + IS_k\ddot{\vec{a}}_k) \times (\vec{R}_k + IS_k\vec{V}_k) + \vec{\omega}_k \times [\vec{\omega}_k \times (\vec{R}_k + IS_k\vec{V}_k)] \\ & + \sum_m H_2(m-k)IS_m\ddot{\vec{d}}_m + IS_k\dot{\vec{V}}_k + \sum_m H_2(m-k)\vec{\omega}_m \times [\vec{\omega}_m \times (\vec{l}_m \\ & + IS_m\vec{d}_m)] + 2\sum_m H_2(m-k)\vec{\omega}_m \times IS_m\dot{\vec{d}}_m + 2\vec{\omega}_k \times IS_k\dot{\vec{V}}_k \end{aligned} \tag{6-3-8}$$

如果设 ζ_k 为第 k 个体的模态坐标阵，则有

$$\vec{a}_k = e_k^T\underset{\sim}{B}_k\zeta_k \qquad \vec{V}_k = e_k^T\underset{\sim}{N}_k\zeta_k \tag{6-3-9}$$

$$\vec{d}_k = e_k^T\underset{\sim}{P}_k\zeta_k$$

式中 $\underset{\sim}{P}_k$，$\underset{\sim}{B}_k$ 为外铰点处的模态阵，与 $\underset{\sim}{N}_k$ 维数相同，$\underset{\sim}{N}_k$ 为保留模态阵. 对第 N 个体，$\underset{\sim}{B}_N = \underset{\sim}{P}_N = 0$，详见文献 [129]. 将（6-3-9）代入到（6-3-8）就得到了考虑柔体效应的第 k 体任一点 P 的加速度的表达式.

从 B_k 体上任一点 P 的虚位移直接得到如下的表达形式：

$$\begin{aligned}\delta\vec{r}_{kp} = {} & \delta\vec{r}_1 + \sum_m H_1(k-m)\delta\vec{\phi}_m \times [\vec{l}^{\,m}_{mk} + (IS\vec{d})^m_{mk} + \vec{R}_k + IS_k\vec{V}_k] \\ & + \sum_m H_1(k-m)IS_m\delta\vec{a}_m \times [\vec{l}^{\,m}_{mk} + (IS\vec{d})^m_{mk} + \vec{R}_k \end{aligned}$$

$$+IS_k\vec{V}_k-\sum_m H_2(m-k)IS_m\delta\vec{a}_m\times(\vec{l}_m+IS_m\vec{d}_m)$$
$$+\sum_m H_2(m-k)IS_m\delta\vec{d}_m-IS_k\delta\vec{a}_k\times(\vec{R}_k+IS_k\vec{V}_k)$$
$$+IS_k\delta\vec{V}_k \tag{6-3-10}$$

上面给出的各个体及各点的运动学描述公式中均包括刚体和柔体的特性. 如果所研究的多体链均由刚体组成，则令上面所有公式中的 IS_k 均为零，即得到全部由刚体组成的多体链的运动学描述方程.

§3.3 约束多体链的动力学方程建立

在不考虑约束时，可直接应用虚功原理建立多体链的动力学方程，有关约束函数的施加及正交补的计算详见本节的最后一个问题.

1. 系统惯性力之虚功

$$\delta W_{惯}=\sum_{k=1}^{n}\delta W_{k惯}=-\sum_{k=1}^{n}\int_k\ddot{\vec{r}}_{kp}\cdot\delta\vec{r}_{kp}dm_k \tag{6-3-11}$$

其中 $\ddot{\vec{r}}_{kp}$ 和 $\delta\vec{r}_{kp}$ 前面已有标准的公式，见(6-3-8)和(6-3-10)，dm_k 为 B_k 物体的质量微元体. 如果将(6-3-8)和(6-3-10)直接代入到(6-3-11)，会得到冗长的公式，为节省篇幅，我们仅在建立方程时，给出具体的表达形式.

2. 系统外力之虚功

设 $\vec{F}_{kp}$ 是作用在 B_k 体上 P 点的外力，在 e_k 中描述，$\vec{M}_k$ 是作用在 B_k 体上的外力矩，亦在 e_k 中描述，则有

$$\delta W_{外力}=\sum_{k=1}^{n}(\delta\vec{r}_{kp}\cdot\vec{F}_{kp}+\delta\vec{\psi}_k\cdot\vec{M}_k) \tag{6-3-12}$$

而

$$\delta\vec{\psi}_k=\sum_j H_1(k-j)\delta\vec{\phi}_j+\sum_j H_2(j-k)IS_j\vec{P}_j\delta\vec{\zeta}_j \tag{6-3-13}$$

如果假设 $\vec{G}_{kp}$ 是作用在 B_k 体上的重力，由(6-3-12)直接得到重力之虚功

$$\delta W_{重力}=\sum_{k=1}^{n}(\delta\vec{r}_{kp}\cdot\vec{G}_{kp}) \tag{6-3-14}$$

3. 系统弹性力和阻尼力之虚功

设 $\underset{\sim}{K}_m$，$\underset{\sim}{C}_m$ 分别是关节处转动弹簧刚度和阻尼系数矩阵，其弹性力和阻尼力之虚功为

$$\delta W_{弹}=-\sum_{m=1}^{n}\delta\underset{\sim}{\phi}_m^T\underset{\sim}{K}_m\underset{\sim}{\psi}_m$$
$$\delta W_{阻尼}=-\sum_{m=1}^{n}\delta\underset{\sim}{\phi}_m^T\underset{\sim}{C}_m\underset{\sim}{\Omega}_m \tag{6-3-15}$$

4. 系统无约束时的动力学方程

由虚功原理得

$$\delta W_{惯}+\delta W_{外力}+\delta W_{重力}+\delta W_{弹}+\delta W_{阻尼}=0$$

把上式的每一项具体化，并注意无约束时，δr_1，$\delta\psi_m$，$\delta\zeta_m(m=1,2,\cdots,n)$ 为独立的广义坐标变分，得到非常复杂的动力学方程如下：

$$
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{M}_v\ddot{\underset{\sim}{r}}_1 - \sum_j^n \underset{\sim}{A}_{1j}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^*\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j - \sum_j^n IS_j\underset{\sim}{A}_{1j}[(\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^* - m_j^*\tilde{\underset{\sim}{T}}_j - \tilde{\underset{\sim}{S}}_j)\underset{\sim}{P}_j - m_j^*\underset{\sim}{B}_j - \underset{\sim}{Z}_j]\ddot{\underset{\sim}{\xi}}_j \\
&\quad = \sum_j^n(\underset{\sim}{A}_{1j}\underset{\sim}{F}_{jp} + \underset{\sim}{G}_{jp}) + \sum_j^n \underset{\sim}{A}_{1j}[\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^*\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{\Omega}_j + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j(m_j^*\tilde{\underset{\sim}{T}}_j + \tilde{\underset{\sim}{S}}_j)\underset{\sim}{\omega}_j] \\
&\qquad + \sum_j^n IS_j\underset{\sim}{A}_{1j}[(\tilde{\underset{\sim}{S}}_j^* - m_j^*\tilde{\underset{\sim}{T}}_j - \tilde{\underset{\sim}{S}}_j)\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j - 2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j(m_j^*\underset{\sim}{B}_j + \underset{\sim}{Z}_j)]\dot{\underset{\sim}{\xi}}_j \qquad (6-3-16a) \\
&-\tilde{\underset{\sim}{S}}_m^{*T}\underset{\sim}{A}_{m1}\ddot{\underset{\sim}{r}}_1 + \sum_j^n \underset{\sim}{J}_{mj}^*\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j - \sum_j^n IS_j[\tilde{\underset{\sim}{S}}_{mj}^{*T}\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{B}_j + \underset{\sim}{H}_{mj}^* - (\underset{\sim}{J}_{mj}^* - \tilde{\underset{\sim}{S}}_{mj}^{*T}\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{T}_j - \underset{\sim}{E}_{mj}^*)\underset{\sim}{P}_j]\ddot{\underset{\sim}{\xi}}_j \\
&\quad = -\sum_{j=1}^n \underset{\sim}{H}_1(j-m)[(\tilde{\underset{\sim}{l}}_{mj}^m + (IS\tilde{d})_{mj}^m + \underset{\sim}{A}_{mj}(\tilde{\underset{\sim}{R}}_j + IS_j\tilde{\underset{\sim}{V}}_j)\underset{\sim}{A}_{jm})^T\underset{\sim}{A}_{mj}(\underset{\sim}{F}_{jp} \\
&\qquad + \underset{\sim}{A}_{j1}\underset{\sim}{G}_{jp}) - \underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{M}_j + \delta_{mj}\underset{\sim}{K}_j\underset{\sim}{\Phi}_j] - \sum_{j=1}^n[(\underset{\sim}{J}_{mj}^*\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j + \delta_{mj}\underset{\sim}{C}_j)\underset{\sim}{\Omega}_j \\
&\qquad + (\tilde{\underset{\sim}{S}}_{mj}^{*T}\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{T}}_j + \underset{\sim}{J}_{mwj}^*)\underset{\sim}{\omega}_j] + \sum_{j=1}^n IS_j[(\tilde{\underset{\sim}{S}}_{mj}^{*T}\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{T}}_j - \underset{\sim}{J}_{mj}^* \\
&\qquad + \underset{\sim}{E}_{mj}^*)\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{P}_j + 2(\tilde{\underset{\sim}{S}}_{mj}^{*T}\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{\omega}_j\underset{\sim}{B}_j + \underset{\sim}{H}_{mwj}^*)]\dot{\underset{\sim}{\xi}}_j \qquad (6-3-16b) \\
&\qquad - [(\tilde{\underset{\sim}{S}}_m^* - \tilde{\underset{\sim}{T}}_m m_m^* - \tilde{\underset{\sim}{S}}_m)\underset{\sim}{P}_m - m_m^*\underset{\sim}{B}_m - \underset{\sim}{Z}_m]^T\underset{\sim}{A}_{m1}\ddot{\underset{\sim}{r}}_1 \\
&\qquad - \sum_{j=1}^n[\underset{\sim}{H}_{jm}^{*T} + \underset{\sim}{B}_B^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_{jm}^* - \underset{\sim}{P}_m^T(\underset{\sim}{J}_{mj}^* - \underset{\sim}{E}_{jm}^{*T} - \tilde{\underset{\sim}{T}}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_{jm}^*)]\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_j \\
&\qquad - \sum_{j=1}^n IS_j\{\underset{\sim}{P}_m^T[\tilde{\underset{\sim}{S}}_{mj}^{*T}\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{B}_j + (\tilde{\underset{\sim}{S}}_{mj}^{*T}\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{T}}_j - \underset{\sim}{J}_{mj}^* + \underset{\sim}{E}_{mj}^* + \tilde{\underset{\sim}{T}}_m^T(\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_{jm}^* \\
&\qquad - m_{mj}^*\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{T}}_j - \underset{\sim}{H}_2(m-j)\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j) + \underset{\sim}{E}_{jm}^{*T} - \underset{\sim}{H}_2(j-m)\tilde{\underset{\sim}{S}}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{T}}_j \\
&\qquad - \delta_{mj}\underset{\sim}{J}_j)\underset{\sim}{P}_j + \underset{\sim}{H}_{mj}^* - \underset{\sim}{H}_2(m-j)(\tilde{\underset{\sim}{T}}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{Z}_j + \tilde{\underset{\sim}{S}}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{B}_j) - \tilde{\underset{\sim}{T}}_m^T m_{mj}^*\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{B}_j \\
&\qquad - \delta_{mj}\underset{\sim}{H}_j] + [\underset{\sim}{B}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}(\tilde{\underset{\sim}{S}}_{jm}^* - m_{mj}^*\tilde{\underset{\sim}{T}}_j - \underset{\sim}{H}_2(m-j)\tilde{\underset{\sim}{S}}_j) + \underset{\sim}{H}_{jm}^{*T} \\
&\qquad - \underset{\sim}{H}_2(j-m)\underset{\sim}{Z}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{T}}_j - \delta_{mj}\underset{\sim}{H}_j^T]\underset{\sim}{P}_j - m_{mj}^*\underset{\sim}{B}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{B}_j - \delta_{mj}\underset{\sim}{M}_j \\
&\qquad - \underset{\sim}{H}_2(j-m)\underset{\sim}{Z}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{B}_j - \underset{\sim}{H}_2(m-j)\underset{\sim}{B}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{Z}_j\}\ddot{\underset{\sim}{\xi}}_j \\
&\quad = \sum_j^n\{\delta_{mj}\underset{\sim}{A}_m\underset{\sim}{\zeta}_m + \delta_{mj}\underset{\sim}{N}_j^T(\underset{\sim}{F}_{jp} + \underset{\sim}{A}_{m1}\underset{\sim}{G}_{jp}) + \underset{\sim}{H}_2(m-j)[(\tilde{\underset{\sim}{l}}_{jm} + IS_m\tilde{\underset{\sim}{d}}_m)\underset{\sim}{P}_m \\
&\qquad + \underset{\sim}{B}_m)^T\underset{\sim}{A}_{mj}(\underset{\sim}{F}_{jp} + \underset{\sim}{A}_{j1}\underset{\sim}{G}_{jp}) + \underset{\sim}{P}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{M}_j] - \underset{\sim}{H}_1(j-m)\underset{\sim}{P}_m^T(\tilde{\underset{\sim}{l}}_{mj}^m \\
&\qquad + (IS\tilde{d})_{mj}^m + \underset{\sim}{A}_{mj}(\tilde{\underset{\sim}{R}}_j + IS_j\tilde{\underset{\sim}{V}}_j)\underset{\sim}{A}_{jm})^T(\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{F}_{jp} + \underset{\sim}{A}_{m1}\underset{\sim}{G}_{jp})\} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^n\{[\underset{\sim}{H}_{jm}^{*T} - \underset{\sim}{P}_m^T(\underset{\sim}{J}_{mj}^* - \tilde{\underset{\sim}{T}}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_{jm}^* - \underset{\sim}{E}_{jm}^{*T}) + \tilde{\underset{\sim}{B}}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{S}_{jm}^*]\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{\Omega}_j \\
&\qquad + [((m_{mj}^*\tilde{\underset{\sim}{T}}_m - \tilde{\underset{\sim}{S}}_{mj}^* + \underset{\sim}{H}_2(j-m)\tilde{\underset{\sim}{S}}_m)\underset{\sim}{P}_m + m_{mj}^*\underset{\sim}{B}_m \\
&\qquad + \underset{\sim}{H}_2(j-m)\underset{\sim}{Z}_m)^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{T}}_j + \underset{\sim}{H}_2(m-j)(\tilde{\underset{\sim}{T}}_m\underset{\sim}{P}_m + \underset{\sim}{B}_m)^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{S}}_j \\
&\qquad + \delta_{mj}(-\underset{\sim}{H}_{wj}^T + \underset{\sim}{P}_m^T\underset{\sim}{J}_{wj}) - \underset{\sim}{P}_m^T\underset{\sim}{J}_{mwj}^*]\underset{\sim}{\omega}_j\} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^n IS_j\{[((\tilde{\underset{\sim}{S}}_{mj}^* - m_{mj}^*\tilde{\underset{\sim}{T}}_m - \underset{\sim}{H}_2(j-m)\tilde{\underset{\sim}{S}}_m)\underset{\sim}{P}_m - \underset{\sim}{H}_2(j-m)\underset{\sim}{Z}_m \\
&\qquad - m_{mj}^*\underset{\sim}{B}_m)^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{T}}_j + \underset{\sim}{P}_m^T(\underset{\sim}{E}_{mj}^* - \underset{\sim}{J}_{mj}^* + \tilde{\underset{\sim}{T}}_m^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_{jm}^* - \underset{\sim}{H}_2(m-j)
\end{aligned}
$$

$$\cdot \tilde{T}_m^T A_{mj} \tilde{S}_j + E_{jm}^{*T} - \delta_{mj} J_j) + B_m^T A_{mj} (\tilde{S}_{jm}^* - H_2(m-j)\tilde{S}_j) + H_{jm}^{*T}$$
$$- \delta_{mj} H_j^T] \tilde{\omega}_0 P_j + 2[(\tilde{S}_{jm}^* - \tilde{T}_m - H_2(j-m)\tilde{S}_m) P_m$$
$$- m_{mj}^* B_m - H_2(j-m) Z_m]^T A_{mj} \tilde{\omega}_j B_j + 2 P_m^T H_{mwj}^*$$
$$- 2H_2(m-j)(\tilde{T}_m P_m + B_m)^T A_{mj} \tilde{\omega}_j Z_j - 2\delta_{mj}(P_m^T \tilde{H}_{wj} + M_{wj})\} \dot{\xi}_j$$
$$m = 1, 2, \cdots, n \qquad (6-3-16c)$$

把上述复杂的动力学方程简写成：

$$M \dot{U} = F \qquad (6-3-17)$$

式中

$$\dot{U} = (\dot{r}_1, \dot{\Omega}_1, \dot{\Omega}_2, \cdots, \dot{\Omega}_n, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \cdots, \dot{\xi}_n)^T \qquad (6-3-18)$$

M是(6-3-16)式左端关于$\dot{U}$的系数矩阵，F是(6-3-16)式所有右端项.

§3.4 约束函数及正交补方法的约束多体链动力学方程

由图6-3多体链的模型可以看出，任一体B_k在惯性参考系的运动可由B_k体内铰的平动和B_k体转动决定，因此，要限制系统中B_k体的运动，只要限制B_k体内铰之平动和B_k体的转动即可.

为此，我们提出在惯性参考系中B_k体内铰平动所受约束函数为

$$r_k = \frac{1}{2} a_k t^2 + b_k t + f_k \qquad (6-3-19)$$

B_k体转动受的约束函数为

$$\omega_k = c_k t + h_k \qquad (6-3-20)$$

利用公式(6-3-4)、(6-3-5)和(6-3-9)、(6-3-19)和(6-3-20)可表达为

$$\dot{r}_1 - \sum_j H_1(k-j) A_{1j} [\tilde{l}'_{jk} + (IS\tilde{d})'_{jk}] \Omega_j$$
$$+ \{ \sum_j H_2(j-k) IS_j A_{1j} [(l_j + IS_j \tilde{d}_j) P_j + B_j]$$
$$- \sum_j H_1(k-j) IS_j A_{1j} [\tilde{l}'_{jk} + (IS\tilde{d})'_{jk}] P_j \} \dot{\xi}_j$$
$$= a_k t + b_k \qquad (6-3-21)$$

$$\sum_j H_1(k-j) A_{1j} \Omega_j + \sum_j H_2(j-k) IS_j A_{1j} P_j \dot{\xi}_j = c_k t + h_k \qquad (6-3-22)$$

所以写成矩阵形式为

$$A \dot{U} = B \qquad (6-3-23)$$

式中$\dot{U} = (\dot{r}_1, \Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \cdots, \dot{\xi}_n)^T$，$A$是$\dot{U}$的系数矩阵，

$$B = \begin{bmatrix} a_k t + b_k \\ c_k t + h_k \end{bmatrix} \qquad (6-3-24)$$

上述约束函数中的a_k, b_k, c_k, h_k是预先设计的常量，根据实际应用需要，约束函数还可设计成其它的函数形式.

按照§6.2节中的过程，我们可求得每个时刻的正交补矩阵 C，把 C^T 左乘以(6-3-17)得

$$C^T M \ddot{U} = C^T F \tag{6-3-25}$$

对(6-3-23)求导数后，与(6-3-24)联立在一起得

$$\begin{bmatrix} C^T M \\ A \end{bmatrix} \ddot{U} = \begin{bmatrix} C^T F \\ \dot{B} - \dot{A}\dot{U} \end{bmatrix} \tag{6-3-26}$$

这就是约束多体链的 d'Alembert－正交补方法的动力学基本方程，而具体表达式详见[107].

若约束多体系统均由刚体组成，即 $IS_j = 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$，其动力学方程和约束函数方程可简化，即(6-3-16)与(6-3-21)，(6-3-22)简化为

$$\begin{aligned} M_v \ddot{r}_1 - \sum_j A_{1j} \tilde{S}_j^* \dot{\Omega}_j &= \sum_j^n (A_{1j} F_{jp} + G_{jp}) + \sum_j A_{1j} [\tilde{S}_j^* \tilde{\omega}_j \Omega_j + \tilde{\omega}_j (\tilde{m}_j^* \tilde{l}_j + \tilde{S}_j) \omega_j] \\ - \tilde{S}_m^{*T} A_{m1} \ddot{r}_1 + \sum_j^n J_{mj}^* \dot{\Omega}_j &= \sum_j H_1 (j-m) [(\tilde{l}_{mj}^m + A_{mj} \tilde{l}_j A_{jm})^T A_{mj} (F_{jp} + A_{j1} G_{1p}) \\ &\quad - A_{mj} M_j + \delta_{mj} K_j \phi_j + \sum_j^n [(J_{mj}^* \tilde{\omega}_j + \delta_{mj} C_j) \Omega_j \\ &\quad + (\tilde{S}_{mj}^{*T} A_{mj} \tilde{\omega}_j \tilde{l}_j \omega_j + J_{mwj}^*) \omega_j] \end{aligned} \tag{6-3-27}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 - \sum_j H_2 (j-k) A_{1j} \tilde{l}_{jk}' \dot{\Omega}_j &= a_k + \sum_j H_1 (j-k) A_{1j} (\tilde{l}_{jk}' \tilde{\omega}_j \Omega_j + \tilde{\omega}_j \tilde{l}_{jk}' \omega_j) \\ \sum_j H_1 (k-j) A_{1j} \dot{\Omega}_j &= c_k - \sum_j H_1 (k-j) A_{1j} \tilde{\omega}_j \Omega_j \end{aligned} \tag{6-3-28}$$

以上各式中的一些符号的表达式详见本节附录.

第三节附录

$$M_v = \sum_k^n m_k$$

$$m_j^* = \sum_k^n H_2 (j-k) m_k$$

$$\tilde{S}_j = \int_m (\tilde{R}_j + IS_j \tilde{V}_j) dm_j$$

$$\tilde{S}_j^* = \sum_k^n H_1 (k-j) [m_k (\tilde{l}_{jk}' + (IS\tilde{d})_{jk}') + A_{jk} \tilde{S}_k A_{kj}]$$

$$\tilde{T}_i = (\tilde{l}_j + IS_i \tilde{d}_i)$$

$$Z_j = \int_i N_j dm_j$$

$$J_k = \int_m (\tilde{R}_k + IS_k \tilde{V}_k)^T (\tilde{R}_k + IS_k \tilde{V}_k) dm_k$$

$$\begin{aligned} J_{mj}^* = \sum_k^n H_1 (k-m) H_1 (k-j) &[(\tilde{l}_{mk}^m + (IS\tilde{d})_{mk}^m)^T A_{mj} (\tilde{l}_{jk}' + (IS\tilde{d})_{jk}') m_k \\ &+ A_{mk} \tilde{J}_k A_{kj} + (\tilde{l}_{mk}^m + (IS\tilde{d})_{mk}^m)^T A_{mk} \tilde{S}_k A_{kj} \end{aligned}$$

$$+\underset{\sim}{A}_{mk}\tilde{\underset{\sim}{S}}_k\underset{\sim}{A}_{kj}(\tilde{\underset{\sim}{l}}^j_{jk}+(IS\tilde{\underset{\sim}{d}})^j_{jk})]$$

$$\tilde{\underset{\sim}{S}}^*_{mj}=\sum_k^n H_1(k-m)H_2(j-k)[(\tilde{\underset{\sim}{l}}^m_{mk}+(IS\tilde{\underset{\sim}{d}})^m_{mk})_{m_k}+\underset{\sim}{A}_{mk}\tilde{\underset{\sim}{S}}_k\underset{\sim}{A}_{km}]$$

$$\underset{\sim}{E}^*_{mj}=H_1(j-m)[(\tilde{\underset{\sim}{l}}^m_{mj}+(IS\tilde{\underset{\sim}{d}})^m_{mj})^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{S}}_j+\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{J}_j]$$

$$\underset{\sim}{H}^*_{mj}=H_1(j-m)[(\tilde{\underset{\sim}{l}}^m_{mj}+(IS\tilde{\underset{\sim}{d}})^m_{mj})^T\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{Z}_j+\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{H}_j]$$

$$\underset{\sim}{H}_j=\int_j(\tilde{\underset{\sim}{R}}_j+IS_j\tilde{\underset{\sim}{V}}_j)^T\underset{\sim}{N}_j dm_j$$

$$\underset{\sim}{J}^*_{m\omega j}=H_1(j-m)[(\tilde{\underset{\sim}{l}}^m_{mj}+(IS\tilde{\underset{\sim}{d}})^m_{mj})^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\tilde{\underset{\sim}{S}}_j+\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{J}_{\omega j}]$$

$$\underset{\sim}{J}_{\omega j}=\int_j(\tilde{\underset{\sim}{R}}_j+IS_j\tilde{\underset{\sim}{V}}_j)^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j(\tilde{\underset{\sim}{R}}_j+IS_j\tilde{\underset{\sim}{V}}_j)dm_j$$

$$\underset{\sim}{H}^*_{m\omega j}=H_1(j-m)[(\tilde{\underset{\sim}{l}}^m_{mj}+(IS\tilde{\underset{\sim}{d}})^m_{mj})^T\underset{\sim}{A}_{mj}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{Z}_j+\underset{\sim}{A}_{mj}\underset{\sim}{H}_{\omega j}]$$

$$\underset{\sim}{H}_{\omega j}=\int_j(\tilde{\underset{\sim}{R}}_j+IS_j\tilde{\underset{\sim}{V}}_j)\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{N}_j dm_j$$

$$\underset{\sim}{M}_{\omega j}=\int_j\underset{\sim}{N}_j^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_j\underset{\sim}{N}_j dm_j$$

$$m^*_{mj}=\sum_k^n H_2(m-k)H_2(j-k)m_k$$

$$\underset{\sim}{M}_j=\int_j\underset{\sim}{N}_j^T\underset{\sim}{N}_j dm_j$$

$$\delta_{mj}=\begin{cases}1 & m=j\\ 0 & m\neq j\end{cases}$$

§4. 基于约束多体链的 d'Alembert -正交补方法的动力学计算机仿真程序及算例

根据上述物理模型和所推导的运动学、动力学及约束函数的基本方程，我们编制了适用于受约束的复杂机构、航天器、机器人和机械臂等系统进行动力学方面分析的计算机仿真程序 DRCRCS (Dynamic Response of Constrained Rigid-Chain Systems).

§4.1 DRCRCS 程序简介

DRCRCS 程序是利用约束多体链系统动力学的 d'Alembert -正交补方法的基本方程的状态方程形式，然后进行数值积分进行求解多体链的各位形变量. 其主要流程图如下图所示. DRCRCS 程序处理的系统的体数可任意，系统可以是开运动链或闭运动链，系统中任意体可受约束和外载荷，相邻体间的公共铰处可受有转弹簧和阻尼. 利用该程序可做如下工作：

(1)已知各关节力矩、外力、关节阻尼、弹簧及约束条件，求系统的微振动响应和大位移响应.

(2)在规划好各关节力矩和设定臂端运动约束的情况下，检验机械臂系统的关节力矩规划的合理性.

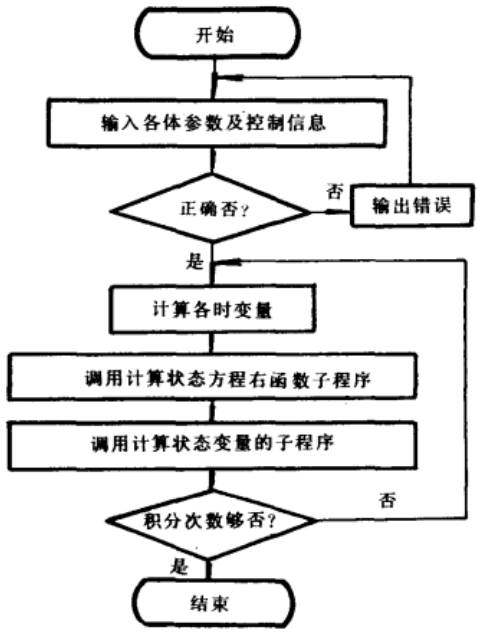


图 6-8　程序流程图

(3)进行三维空间的位形分析与计算,因此可设置故障,利用该程序对空间机械臂、航天器等系统在失控时进行故障分析.

(4)在已知初始条件时,可求得每个体的质心绝对速度和加速度、绝对角速度和角加速度;各体相对角位移,相对角速度和相对角加速度.在一定条件下,还可求得关节力,这为控制的实施和优化设计提供必要的数据.

§4.2　算例及结果分析

1. 平面双复摆的微振动响应计算

平面双复摆由均质杆 AB 和 BC 构成,两杆长度 $AB=BC=1=0.3048\text{m}$,其质量 $M_1=M_2=14.6\text{kg}$.求其微振动响应.其示意图见下图6-9,初始值为 $\psi_1(0)=0.1\text{rad}$,$\psi_2(0)=0.2\text{rad}$,$\dot{\psi}_1(0)=\dot{\psi}_2(0)=0$.

(1)系统的解析解

以 ψ_1,ψ_2 为广义坐标,其微振动解析解为

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A\sin(1.9037t+a)\\ &\quad + B\sin(5.091t+\beta)\\ \psi_2 &= 1.43A\sin(1.9037t+a)\\ &\quad - 2.09B\sin(5.091t+\beta)\end{aligned}$$

由初始条件得

$$a=\frac{\pi}{2};\quad \beta=-\frac{\pi}{2}$$

$$A = 0.1162; \quad B = 0.0162$$

如果以 θ_1, θ_2 为广义坐标，则有 $\psi_1 = \theta_1, \psi_2 = \theta_1 + \theta_2$，直接利用上式的结果就可得到 θ_1 与 θ_2 的解析表达式：

$$\theta_1(t) = 0.1162\sin(1.9037t + \frac{\pi}{2}) + 0.0162\sin\left(5.091t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta_2(t) = 0.05\sin\left(1.9037t + \frac{\pi}{2}\right) - 0.05\sin\left(5.091t - \frac{\pi}{2}\right)$$

系统在6秒内 $\theta_1(t)$ 与 $\theta_2(t)$ 的变化曲线见图6-10与图6-11.

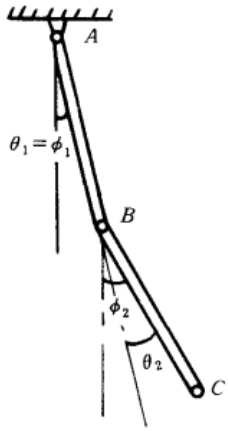


图6-9　平面双复摆

(2)用 DRCRCS 程序计算此例

从约束系统的角度来看，此系统为有根开链约束系统，体数为2，且为平面问题，经 DRCRCS 程序运算后，图6-12，图6-13给出了6秒内 $\theta_1(t)$ 与 $\theta_2(t)$ 的变化曲线.

由图6-10至图6-13可见，解析解与 DRCRCS 程序计算的数值解的结果几乎完全一致，表明 DRCRCS 程序计算是完全可靠的.

2. 机械臂爪端受运动约束例子

我们考虑端部运动已知的五杆链索系统，如图6-14所示. 五杆

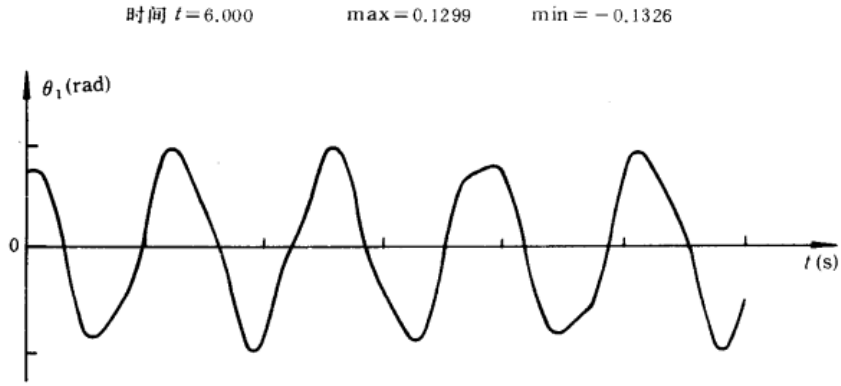


图6-10　转角 θ_1 的变化曲线　精确解结果

链索由长度均为0.3048m，质量均为14.6kg 的均质杆相互铰接而成. 系统的初始位置如图6-14，系统左端 A 固定，右端 B 给定一向下的加速度1.2192m/s^2，研究在给定端部运动和重力作用下系统的位形变化曲线. 经 DRCRCS 程序计算，系统在1秒内位形的变化见图6-15，结果与［81］完全一致.

3. 闭链约束系统的算例

这里模化双机械臂抓握一物体后协调运动的过程. 将整个系统视为一闭链机构，如图6-16所示. 设各杆为等长均质杆，$l=0.3048$m，$m=14.6$kg，A，B 两端固定，杆4沿 z 轴的加速度为0.5m/s^2，沿 y 轴的加速度为-2m/s^2，绝对角速度为零. 研究在已给定的运动与重力条件下，系统位形的变化规律.

系统在0.8秒内的位形变化规律由 DRCRCS 程序计算，如图6-17所示. 图示结果表明，杆4的运动规律恰是我们设定的规律，因为

时间 $t=6.000$　　max$=0.1000$　　min$=-0.0988$



图6-11　转角 θ_2 的变化曲线——精确解结果

时间 $t=5.999$　　max$=0.1300$　　min$=-0.1326$

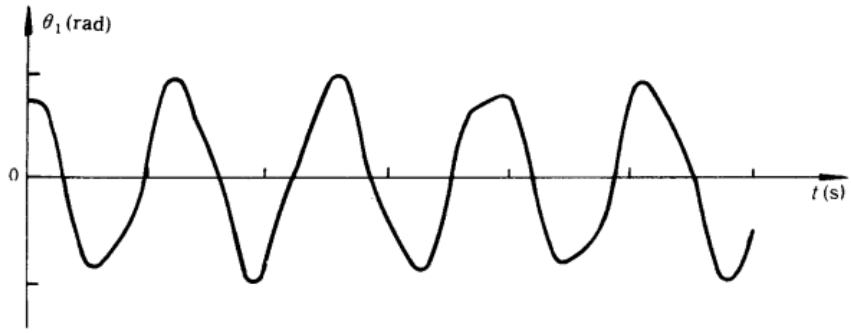


图6-12　转角 θ_1 的变化曲线——DRCRCS 结果

时间 $t=5.999$　　max$=0.1000$　　min$=-0.0989$



图6-13　转角 θ_2 的变化曲线——DRCRCS 结果

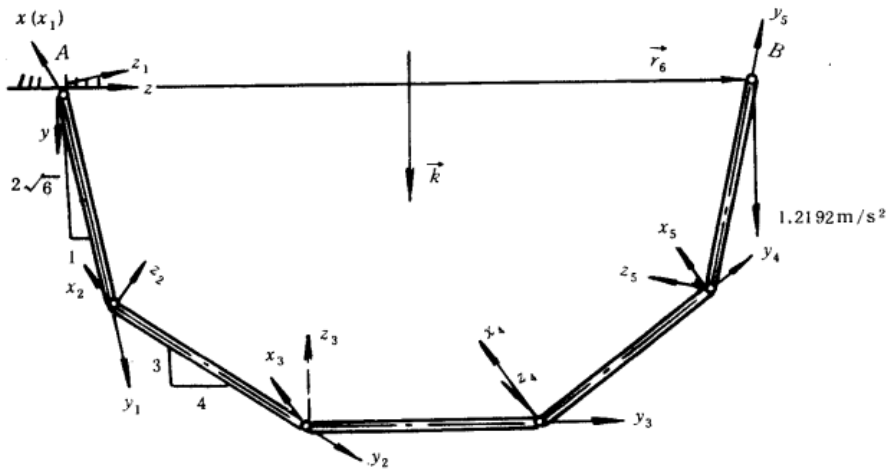


图6-14　端部运动已知的五杆链索系统

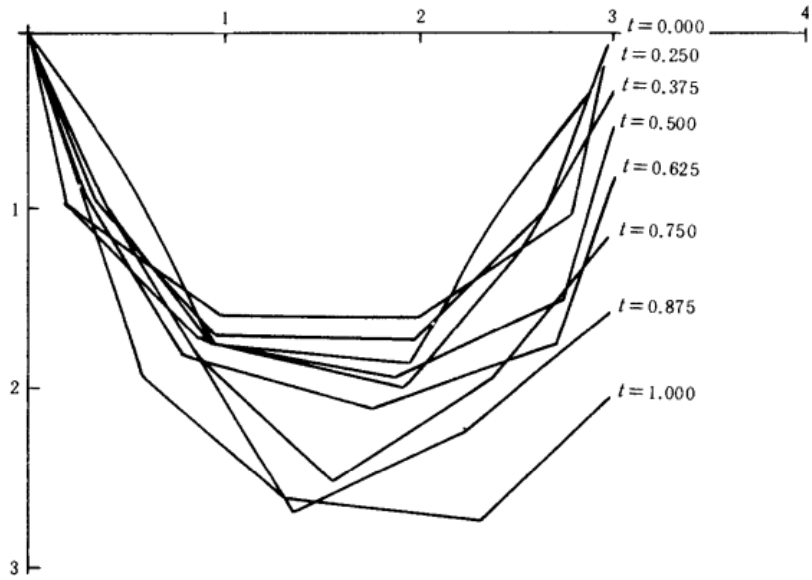


图6-15　五杆链系统1秒内的构形图

$$S_{4y} = -\frac{l}{0.3048}t^2 + 2.6l$$

$$S_{4z} = -\frac{0.25l}{0.3048}t^2 + 1.5l$$

故完全符合预先设定的约束运动. 随着杆4的逐渐右上移动，杆1和杆2、杆3逐渐被提起，向右拉开. 杆5、杆6、杆7逐渐相互靠近. 在重力作用下，由于杆4保持平动，故杆5相对杆4的转

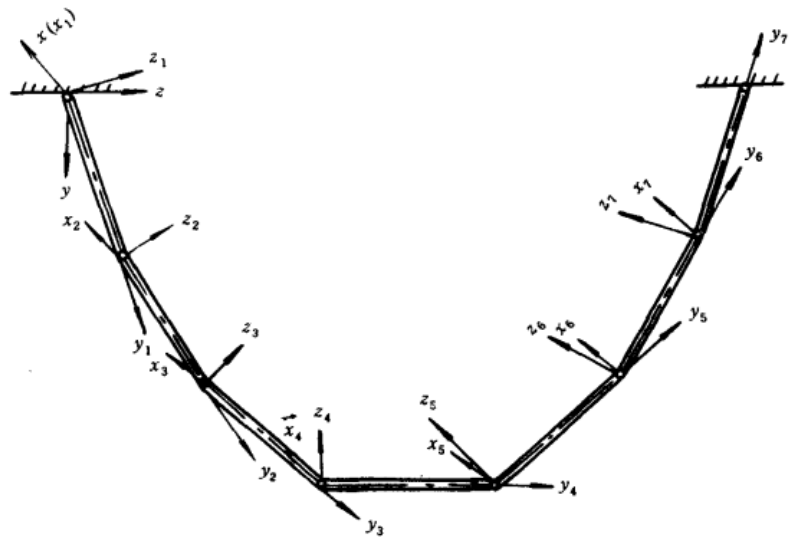


图6-16　七杆闭链系统——中间杆保持水平

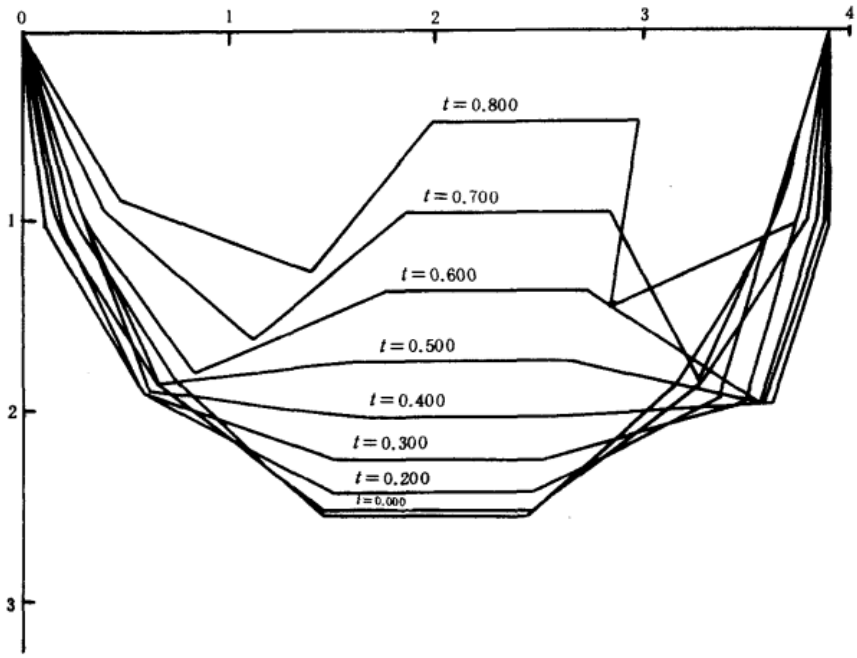


图6-17　闭链系统构形图——随时间变化的构形

角位移变化较大，杆4相对杆3的转角位移变化也较大，这些转角的变化规律可从图6-18和图6-19看出，这进一步说明 DRCRCS 程序的可靠性与实用性.

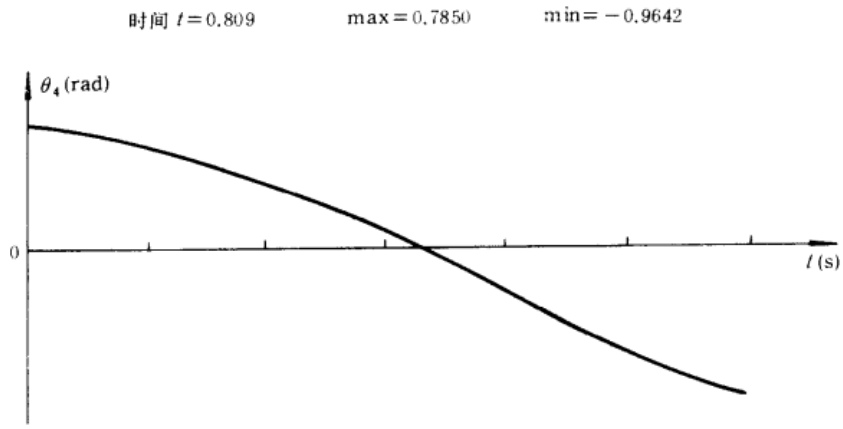


图6-18 转角 θ_4 变化规律

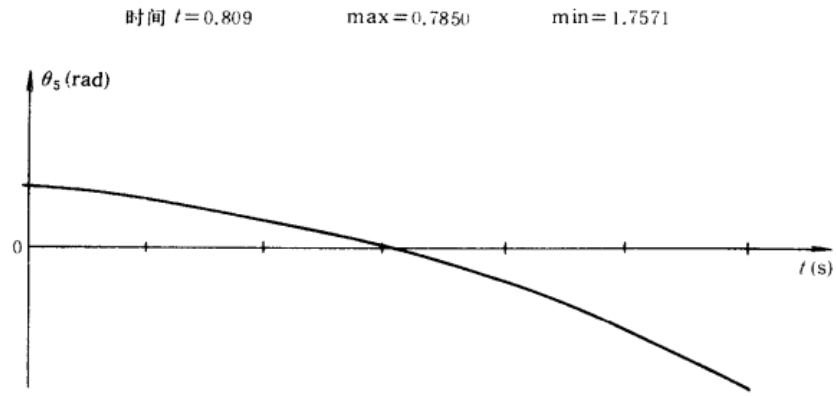


图6-19 转角 θ_5 变化规律

§5. 约束多体系统动力学的 Newton-Euler 正交法

目前建立机器人动力学方程的力学原理或方法大体可分为两大类，即矢量力学(Newton 力学)和分析力学(Lagrange 力学)[56][29][46]. 矢量力学方法物理概念明确，推导过程直观，可采用递归算法，计算效率高，但它不能给出结构完善的表示式，很难用于推导出高级控制规律，对约束的处理比较复杂. 分析力学方法，诸如 Lagrange 法，d'Alembert 原理，Hamilton 原理和 Kane 方程等主要是从能量角度出发，而系统能量函数的处理、广义坐标和广义速度的微分困难，且方程的推导及计算工作量大，物理概念也不明确，这会给非力学专业人员带来烦恼.

本节运用微分几何的概念——切空间与法空间正交性原理，在 Newton-Euler 法的基础上发展了一种建立多体系统动力学方程的有效方法. 该法在继承原矢量力学优点的基础上给出结构完善的动力学方程的解析表示式. 最后给出在机器人中的具体应用.

§5.1 Newton-Euler 正交法的一般原理

对于一个系统是否可称为约束系统关键在于我们的着眼点. 若一个系统具有 n 个自由度，当在一个 n 维位形空间中用 n 个广义坐标表示它时，它就实为一个不受约束的系统. 当对它施加 m 个约束后，其自由度就退化为$(n-m)$个. 此时，在 n 维位形空间中描述，它就变为受约束系统，但在$(n-m)$维位形空间中描述，它又是个不受约束的系统.

一个大系统通常是由多个子系统组成的，但这些子系统并不是不受任何限制地简单叠加在一起组成一个系统，而是通过一定的关系实现的，这种关系是对各子系统之间运动的限制，即对系统施加的约束.

若一个系统在 n 维位形空间中未受约束时，动力学方程可简写为

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{U}}=\underset{\sim}{F} \tag{6-5-1}$$

式中 $\underset{\sim}{U}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^T$ 为系统广义坐标；$\underset{\sim}{M}$为系统广义质量阵；$\underset{\sim}{F}$为系统的柯氏力、离心力、重力和广义外力项.

当系统受到 m 个完整约束时(机器人系统一般为完整约束)，其约束形式为

$$\underset{\sim}{C}(\underset{\sim}{U})=0 \tag{6-5-2}$$

式中 $\underset{\sim}{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_m)^T$ 为 n 维位形空间中的 m 维超曲面.

原系统在 n 维位形空间中就变为一个受约束的系统，由 Lagrange 乘子法可以给出其动力学方程为

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{U}}=\underset{\sim}{F}+\underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{f} \tag{6-5-3}$$

式中 $\underset{\sim}{f}\in R^m$ 为拉氏乘子，代表约束力；$\underset{\sim}{B}=\dfrac{\partial \underset{\sim}{C}}{\partial \underset{\sim}{U}}$为式(6-5-2)的约束 Jacobian 阵.

此时，方程(6-5-3)的未知量是$\underset{\sim}{U}$和$\underset{\sim}{f}$，未知数个数是$(n+m)$个. 而系统的自由度数却变为$(n-m)$个. 若该约束系统在$(n-m)$维位形空间中用$(n-m)$个广义坐标表示时，其动力学方程即化为式(6-5-1)表示的系统未受约束时的形式. 因此，建立约束系统动力学方程就是将式(6-5-3)变化为式(6-5-1)的过程. 但这需要完成两项工作：

第一，消去未知拉氏乘子(约束力)$\underset{\sim}{f}$；

第二，方程(6-5-3)的降维，即另选一组$(n-m)$个广义坐标替代原 n 维广义坐标.

通常这两项工作很繁琐，十分令人头痛. 许多学者曾纷纷献策. 但目前处理约束的方法大体有两种：第一种是含有待定乘子法，如 Lagrange 乘子、Kane 待定乘子法[81]等，它们最后形成的是$(n+m)$维的代数-微分方程，方程的系数阵呈稀疏，其数值解困难，而且无法直接完成上述两项工作；第二种是不含待定乘子法，如奇异值分解(SVD)[73]、零特征值理论(Zero Eigenvalues Theorem)[43]等，它形成的方程与原系统位形坐标维数相同，虽然它完成第一项工作消除了未知约束力 $\underset{\sim}{f}$，但未完成第二项工作彻底降维，而且都是面向计算机，过程的一切变量皆用数值表示.

在总结上述两种方法基本原理的基础上引入微分几何中的概念——切空间与法空间

正交的原理. 本节发展了一种能完成上述两项工作的解析方法.

对于系统所受式(6-5-2)表示的完整约束,其位形点就被限制在这 m 维超曲面上运动,因此系统的运动轨迹必然发生在各约束超曲面的交线上. 这个交曲线就称为运动曲线,即

$$H = c_1 \cap c_2 \cap \cdots \cap c_m \tag{6-5-4}$$

因为运动曲线的切空间一定与法空间正交,而该运动曲线的切空间(运动空间)为$(n-m)$维,法空间为 m 维.

问题的核心是建立运动曲线法空间和切空间的基底描述:

1. 运动曲线法空间的基底

令其基底为 $\underset{\sim}{N}$,每个约束超曲面的法矢量为 $n_i(i=1,2,\cdots,m)$,由式(6-5-2)有

$$n_i = \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_1}, \frac{\partial c_i}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial c_i}{\partial x_n},\right)^T \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{6-5-5}$$

显然可由式(6-5-5)构成运动曲线法空间的基底 $\underset{\sim}{N}$,即

$$\underset{\sim}{N}_{n\times m} = [\underset{\sim}{n}_1, \underset{\sim}{n}_2, \cdots, \underset{\sim}{n}_m] \tag{6-5-6}$$

由式(6-5-3)可得

$$\underset{\sim}{B}^T = \underset{\sim}{N} \tag{6-5-7}$$

因此,方程(6-5-3)中拉氏乘子前的矩阵 $\underset{\sim}{B}^T$ 可作为约束系统运动曲线上法空间的基底.

2. 运动曲线切空间的基底

令其基底为 $\underset{\sim}{T}$,在$(n-m)$维位形空间中的广义坐标为

$$q = (q_1, q_2, \cdots, q_{n-m})^T \tag{6-5-8}$$

用 q 表示 n 维位形空间中的运动曲线,有

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}(q) \tag{6-5-9}$$

显然对于运动曲线上任意点矢径 R,在 n 维位形空间有

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}(q) \tag{6-5-10}$$

根据微分几何原理,切空间的基底可由下式得到

$$\underset{\sim}{T} = (\underset{\sim}{T}_1, \underset{\sim}{T}_2, \cdots, \underset{\sim}{T}_{n-m}) \tag{6-5-11}$$

式中 $\underset{\sim}{T}_i = \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_i}, \frac{\partial u_2}{\partial q_i}, \cdots, \frac{\partial u_n}{\partial q_i}\right)^T \qquad (i=1,2,\cdots,n-m).$

为使新选的广义坐标与原系统对应,具有明显的物理意义,取式(6-5-8)为

$$q = (u_{m+1}, u_{m+2}, \cdots, u_n)^T$$

则有

$$\underset{\sim}{U} = (u_1(q), u_2(q), \cdots, u_m(q), q^T)^T \tag{6-5-12}$$

于是,切空间的基底(6-5-11)变为

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \underset{\sim}{Y}}{\partial q} \\ \underset{\sim}{I}_{(n-m)} \end{bmatrix}_{n\times(n-m)} \tag{6-5-13}$$

式中 $\underset{\sim}{Y} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^T$.

由式(6-5-12)有

$$\dot{\underset{\sim}{U}} = \underset{\sim}{T}\,\dot{\underset{\sim}{q}}$$

$$\ddot{\underset{\sim}{U}} = \underset{\sim}{T}\,\ddot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{D} \quad (\underset{\sim}{D} = \dot{\underset{\sim}{T}}\,\dot{\underset{\sim}{q}}) \tag{6-5-14}$$

3. 证明所选切空间与法空间基底的正交性

将约束方程(6-5-2)对 q 微分得

$$\frac{\partial \underset{\sim}{C}}{\partial \underset{\sim}{Y}} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{Y}}{\partial \underset{\sim}{q}} \cdot dq + \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{C}}{\partial \underset{\sim}{q}} \cdot dq = 0$$

若 $\frac{\partial \underset{\sim}{C}}{\partial \underset{\sim}{Y}}$ 满秩，则有

$$\frac{\partial \underset{\sim}{Y}}{\partial \underset{\sim}{q}} = -\left(\frac{\partial \underset{\sim}{C}}{\partial \underset{\sim}{Y}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \underset{\sim}{C}}{\partial \underset{\sim}{q}}\right) \tag{6-5-15}$$

将式(6-5-15)代入(6-5-13)，再由式(6-5-6)，(6-5-7)，有下式成立

$$\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{B}^T = 0 \tag{6-5-16}$$

所选切空间、法空间基底正交性得证.

根据上述原理，首先用切空间的基底 $\underset{\sim}{T}^T$ 左乘方程(6-5-3)两边，并把式(6-5-14)代入，由式(6-5-16)得

$$\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{T}\,\ddot{\underset{\sim}{q}} = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{F} - \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{D} \tag{6-5-17}$$

至此，已完成建立约束系统动力学方程所要求的两项工作，式(6-5-17)即为所求方程. 上述的推导也证明了运用该法建立约束系统动力学方程时，各子系统之间的约束力 f 不必列出，而不影响其结果. 在上述的推导过程中未作任何假设，因此所得的结论及方法具有普遍意义.

§5.2 Newton-Euler 正交法在机器人动力学中的应用

运用上节的原理建立机器人的动力学方程，主要分三步进行. 第一，建立机器人杆件的 Newton-Euler 方程，并将其组成式(6-5-3)的矩阵形式；第二，根据机器人杆件运动学关系，建立切空间的基底 T 及式(6-5-14)的方程；第三，最后根据式(6-5-17)形成系统的动力学方程.

1. 机器人坐标系及其 Newton-Euller 方程式

根据文献[118]，机器人杆件坐标系的建立应遵循下面4条规则：

(1)Z_{i-1} 轴沿着第 i 关节的运动轴；

(2)X_i 轴垂直 Z_{i-1} 轴，并指向离开 Z_{i-1} 轴的方向；

(3)Y_i 轴按右手坐标系的要求建立；

(4)将第 i 个坐标系的原点放在 Z_i 和 Z_{i-1} 轴的交点处，或放在它们的公垂线与 $\hat{Z}_i$ 轴的交点处。

由文献[118]标准正交坐标系 $(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})$ 建立在关节 i 上，坐标系 (X_0, Y_0, Z_0) 是机座坐标系，而坐标系 $(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})$ 和 (X_i, Y_i, Z_i) 分别固联于杆件 $i-1$ 和杆件 i 上，原点分别为 O_{i-1} 和 O_i. 原点 O_i 相对于原点 O_0 和原点 O_{i-1} 的位置分别用矢量 ${}^0\hat{P}_i$ 和 $\hat{P}_i$ 表示. 原点 O_{i-1} 相对于原点 O_0 的位置用矢量 ${}^0\hat{P}_{i-1}$ 表示.

目前，多数实用的工业机器人的运动学模型均采用4×4齐次变换矩阵来描述. 其中最

典型的一种方法就是 Denavit－Hartenburg 表示法. 这里仅给出机器人各杆件 Newton-Enler 方程的组装矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{J}_0 & \\ & \underset{\sim}{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\omega}} \\ \ddot{\underset{\sim}{X}}_c \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}_1 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{f}_n \\ m_1\underset{\sim}{g} \\ \vdots \\ m_n\underset{\sim}{g} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[(\tilde{\underset{\sim}{P}}_1 + \tilde{\underset{\sim}{S}}_1)^0\underset{\sim}{R}_1^T + \tilde{\underset{\sim}{S}}_1{}^0\underset{\sim}{R}_1^T & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & -[(\underset{\sim}{P}_{n-1} + \tilde{\underset{\sim}{S}}_{n-1})^0\underset{\sim}{R}_{n-1}^T] + (\tilde{\underset{\sim}{S}}_{n-1}{}^0\underset{\sim}{R}_{n-1}^T) & & \\ & & -[(\tilde{\underset{\sim}{P}}_n + \tilde{\underset{\sim}{S}}_n)^0\underset{\sim}{R}_n^T & \\ \underset{\sim}{I} & -\underset{\sim}{I} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \underset{\sim}{I} & -\underset{\sim}{I} \\ & & & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} \underset{\sim}{F}$$

$$+ \begin{bmatrix} {}^0\underset{\sim}{R}_1^T & -\underset{\sim}{I} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & {}^{n-2}\underset{\sim}{R}_{n-1}^T & -\underset{\sim}{I} & \\ & & & {}^{n-1}\underset{\sim}{R}_n^T \\ \underset{\sim}{0}_{n\times n} & & & \end{bmatrix} \underset{\sim}{N} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0}_{(n-1)\times 2} & \\ \tilde{\underset{\sim}{S}}_n{}^0\underset{\sim}{R}_n^T & -\underset{\sim}{I} \\ \underset{\sim}{0}_{(n-1)\times 2} & \\ -\underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{F}_{n+1} \\ \underset{\sim}{N}_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (6-5-18a)$$

式中 $\tilde{\underset{\sim}{S}}_i$ 为杆件 i 的体坐标系 e_i 原点至质心 C_i 的位置矢量；${}^0\underset{\sim}{R}_i$ 为从局部坐标系 e_i 至惯性系的转换阵；${}^i\underset{\sim}{R}_{i+1}$ 为从局部坐标系 $(i+1)$ 至 i 的转换阵.

$$\underset{\sim}{J}_c = \mathrm{diag}(\underset{\sim}{J}_{1c}, \underset{\sim}{J}_{2c}, \cdots, \underset{\sim}{J}_{nc}), \quad \underset{\sim}{M} = \mathrm{diag}(m_1\underset{\sim}{I}, m_2\underset{\sim}{I}, \cdots, m_n\underset{\sim}{I}).$$

$$\underset{\sim}{\omega} = (\underset{\sim}{\omega}_1^T, \underset{\sim}{\omega}_2^T, \cdots, \underset{\sim}{\omega}_n^T)^T \qquad \underset{\sim}{X}_c = (\underset{\sim}{X}_{1c}^T, \underset{\sim}{X}_{2c}^T, \cdots, \underset{\sim}{X}_{nc}^T)^T$$

$$\underset{\sim}{F} = (\underset{\sim}{F}_1^T, \underset{\sim}{F}_2^T, \cdots, \underset{\sim}{F}_n^T)^T \qquad \underset{\sim}{N} = (\underset{\sim}{N}_1^T, \underset{\sim}{N}_2^T, \cdots, \underset{\sim}{N}_n^T)^T$$

$$f_i = -\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_i\underset{\sim}{J}_{ic}\underset{\sim}{\omega}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

在这里若第 i 关节为转动关节，$\underset{\sim}{N}_i = \underset{\sim}{Z}_0\tau_i$；若第 i 关节为移动关节，$\underset{\sim}{F}_i = \underset{\sim}{Z}_0\tau_i$（$\tau_i$ 为对应关节驱动力或力矩），$\underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{Z}_0 g$；在采用本节约定的坐标系后 $Z_0^T = (0, 0, 1)$.

将式(6-5-18a)简记为

$$\underset{\sim}{K}\ddot{\underset{\sim}{U}} = -\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{N} + \underset{\sim}{D}\underset{\sim}{F}_c \qquad (6-5-18b)$$

式中 $\underset{\sim}{f} = (\underset{\sim}{f}_1^T, \underset{\sim}{f}_2^T, \cdots, \underset{\sim}{f}_n^T, m_1\underset{\sim}{g}^T, m_2\underset{\sim}{g}^T, \cdots, m_n\underset{\sim}{g}^T)^T$；$\underset{\sim}{F}_c = (\underset{\sim}{F}_{n+1}^T, \underset{\sim}{N}_{n+1}^T)^T$ —— 末端作用的外力、矩.

式(6-5-18b)为机器人系统的 Newton-Euler 方程.

2. 机器人杆件的运动学

根据运动坐标系（转动和平移）与惯性坐标系（固定）之间的微分关系，建立描述机器人的运动杆件相对于机座坐标系的运动学关系. 杆件 i 坐标系相对于参考坐标系的角速度及角加速度为

$${}^0\underset{\sim}{\omega}_i = \begin{cases} {}^0\underset{\sim}{\omega}_{i-1} + \dot{\underset{\sim}{Z}}_{i-1}\dot{q}_i & \text{若杆件 } i \text{ 转动} \\ {}^0\underset{\sim}{\omega}_{i-1} & \text{若杆件 } i \text{ 平移} \end{cases} \qquad (6-5-19)$$

$$
{}^0\dot{\underset{\sim}{\omega}}_i=\begin{cases}{}^0\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1}+\underset{\sim}{Z}_{i-1}\ddot{q}+{}^0\underset{\sim}{\omega}_{i-1}\times(\underset{\sim}{Z}_{i-1}\dot{q}_i) & \text{若杆件 } i \text{ 转动}\\ {}^0\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1} & \text{若杆件 } i \text{ 平移}\end{cases}
\tag{6-5-20}
$$

式中 $\underset{\sim}{Z}_{i-1}$ 为机座坐标系中表示的沿关节 i 运动轴方向的单位矢量.

将杆件的角速度 ${}^0\underset{\sim}{\omega}_i$ 和角加速度 ${}^0\dot{\underset{\sim}{\omega}}_i$ 变成在局部坐标系(杆件自身坐标系)内描述,有

$$
\underset{\sim}{\omega}_i=\begin{cases}{}^i\underset{\sim}{R}_{i-1}({}^{i-1}\underset{\sim}{R}_0^0\underset{\sim}{\omega}_{i-1}+\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_i) & \text{若杆件 } i \text{ 转动}\\ {}^i\underset{\sim}{R}_{i-1}({}^{i-1}\underset{\sim}{R}_0^0\underset{\sim}{\omega}_{i-1}) & \text{若杆件 } i \text{ 平移}\end{cases}
\tag{6-5-21}
$$

$$
\dot{\underset{\sim}{\omega}}_i=\begin{cases}{}^i\underset{\sim}{R}_{i-1}[{}^{i-1}\underset{\sim}{R}_0^0\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1}+\underset{\sim}{Z}_0\ddot{q}_i+({}^{i-1}\underset{\sim}{R}_0^0\underset{\sim}{\omega}_{i-1})\times\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_i] & \text{若杆件 } i \text{ 转动}\\ {}^i\underset{\sim}{R}_{i-1}({}^{i-1}\underset{\sim}{R}_0^0\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1}) & \text{若杆件 } i \text{ 平移}\end{cases}
\tag{6-5-22}
$$

杆件 i 坐标系相对于参考坐标系的线速度和线加速度为

$$
\underset{\sim}{V}_i=\begin{cases}{}^0\underset{\sim}{\omega}_i\times({}^0\underset{\sim}{R}_i\underset{\sim}{P}_i)+\underset{\sim}{V}_{i-1} & \text{若杆件 } i \text{ 转动}\\ \underset{\sim}{Z}_{i-1}\dot{q}_i+{}^0\underset{\sim}{\omega}_i\times({}^0\underset{\sim}{R}_i\underset{\sim}{P}_i)+\underset{\sim}{V}_{i-1} & \text{若杆件 } i \text{ 平移}\end{cases}
\tag{6-5-23}
$$

$$
\dot{\underset{\sim}{V}}_i=\begin{cases}{}^0\dot{\underset{\sim}{\omega}}_i\times({}^0\underset{\sim}{R}_i\underset{\sim}{P}_i)+{}^0\underset{\sim}{\omega}_i\times[{}^0\underset{\sim}{\omega}_i\times({}^0\underset{\sim}{R}_i\underset{\sim}{P}_i)]+\dot{\underset{\sim}{V}}_{i-1} & \text{若杆件 } i \text{ 转动}\\ \underset{\sim}{Z}_{i-1}\ddot{q}_i+{}^0\dot{\underset{\sim}{\omega}}_i\times({}^0\underset{\sim}{R}_i\underset{\sim}{P}_i)+2{}^0\underset{\sim}{\omega}_i\times(\underset{\sim}{Z}_{i-1}\dot{q}_i)] & \text{若杆件 } i \text{ 平移}\\ \quad+{}^0\underset{\sim}{\omega}_i\times[{}^0\underset{\sim}{\omega}_i\times({}^0\underset{\sim}{R}_i\underset{\sim}{P}_i)]+\dot{\underset{\sim}{V}}_{i-1}\end{cases}
\tag{6-5-24}
$$

杆件 i 质心的线速度和线加速度为

$$
\dot{\underset{\sim}{X}}_{ic}=\begin{cases}{}^0\underset{\sim}{\omega}_i\times({}^0\underset{\sim}{R}_i\underset{\sim}{S}_i)+\underset{\sim}{V}_i & \text{若杆件 } i \text{ 转动}\\ \underset{\sim}{V}_i & \text{若杆件 } i \text{ 平移}\end{cases}
\tag{6-5-25}
$$

$$
\dot{\underset{\sim}{V}}_{ic}\begin{cases}{}^0\dot{\underset{\sim}{\omega}}_i\times({}^0\underset{\sim}{R}_i\underset{\sim}{S}_i)+{}^0\underset{\sim}{\omega}_i\times[{}^0\underset{\sim}{\omega}_i\times({}^0\underset{\sim}{R}_i\underset{\sim}{S}_i)]+\dot{\underset{\sim}{V}}_i & \text{若杆件 } i \text{ 转动}\\ \dot{\underset{\sim}{V}}_i & \text{若杆件 } i \text{ 平移}\end{cases}
\tag{6-5-26}
$$

注意,在上述式中,若杆件 i 为平移运动,则 ${}^0\underset{\sim}{\omega}_i={}^0\underset{\sim}{\omega}_{i-1}$.

§5.3 机械臂 PUMA562实例

为演示上述原理的用法,本节建立 PUMA562前三个杆件的动力学方程. 其构形图及作用于杆件 i 上的力和力矩如图6-20所示,为简便起见,设末端作用外力(矩) $F_e=0$.

1. 系统的 Newton-Euler 方程

由式(6-5-18)可写出系统的 Newton-Euler 方程的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} J_{1c} & & & & & \\ & J_{2c} & & & & \\ & & J_{3c} & & & \\ & & & M_1 & & \\ & & & & M_2 & \\ & & & & & M_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{V}_{1c} \\ \dot{V}_{2c} \\ \dot{V}_{3c} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \tilde{\omega}_1 J_{1c} \omega_1 \\ \tilde{\omega}_2 J_{2c} \omega_2 \\ \tilde{\omega}_3 J_{3c} \omega_3 \\ M_1 Z_0 g \\ M_2 Z_0 g \\ M_3 Z_0 g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^0R_1^T Z_0 & -Z_0 & 0 \\ 0 & {}^1R_2^T Z_0 & -Z_0 \\ 0 & 0 & {}^2R_3^T Z_0 \\ & 0_{9\times 3} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{Bmatrix}$$

(6-5-27a)

在上式中没写出 AF 项，原因是它为约束力，运用上述正交性原理形成最后的系统动力学方程时将被消去，不写出该项并不影响最后的结果；又由于 PUMA 562各关节均为转动关节，因此 $N_i = Z_0 \tau_i$，τ_i 是关节 i 的驱动力矩.

上式简记为

$$K\dot{U} = -f + B\tau \tag{6-5-27b}$$

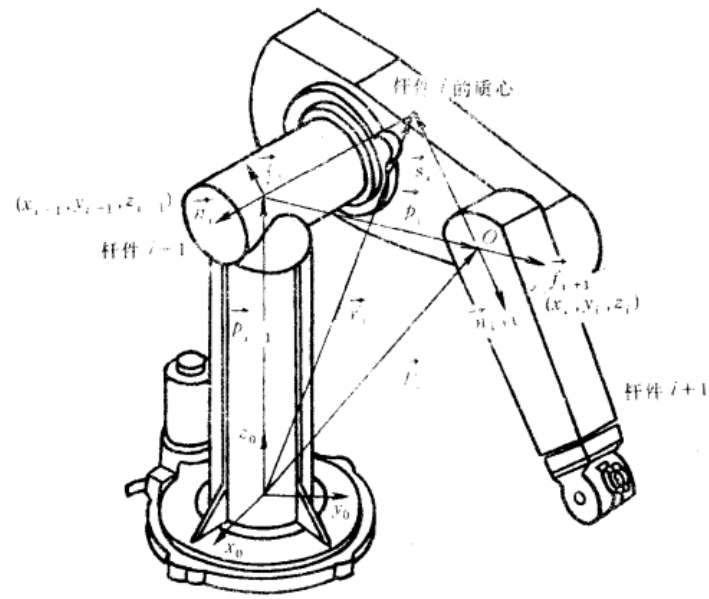


图6-20 PUMA 562前三个关节构形图

2. 系统的运动方程

因为 PUMA 562前三个关节均为转动关节，所以选取各杆件的关节转角为广义坐标，即 $q = (q_1, q_2, q_3)^T = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$.

由式(6-5-22)和式(6-5-26)有

$$\dot{\omega}_i = \sum_{j=1}^{i} {}^iR_{j-1} Z_0 \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{i} \left(\sum_{k=1}^{j-1} R_{k-1} Z_0 \dot{q}_k \right) \times \left({}^iR_{j-1} Z_0 \dot{q}_j \right) \tag{6-5-28}$$

$$\dot{\underset{\sim}{V}}_{ic}=-\sum_{j=1}^{i-1}({}^0\underset{\sim}{R}_j\underset{\sim}{P}_j)\times\Big[\sum_{k=1}^{j}({}^0\underset{\sim}{R}_{k-1}\underset{\sim}{Z}_0\ddot{q})\Big]-[{}^0\underset{\sim}{R}_i(\underset{\sim}{P}_i+\underset{\sim}{S}_i)]\times\Big[\sum_{j=1}^{i}({}^0\underset{\sim}{R}_{j-1}\underset{\sim}{Z}_0\ddot{q}_j)\Big]$$
$$-\sum_{j=1}^{i-1}({}^0\underset{\sim}{R}_j(\underset{\sim}{P}_j)\times\Big[\sum_{k=1}^{j}(\sum_{i=1}^{k-1}{}^0\underset{\sim}{R}_{j-1}\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_j)\times({}^0\underset{\sim}{R}_{k-1}\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_k)\Big]$$
$$-[{}^0\underset{\sim}{R}_i(\underset{\sim}{P}_i+\underset{\sim}{S}_i)]\times\Big[\sum_{j=1}^{i}\Big(\sum_{k=1}^{j-1}{}^0\underset{\sim}{R}_{k-1}\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_k\Big)\times({}^0\underset{\sim}{R}_{j-1}\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_j)\Big]$$
$$+\sum_{j=1}^{i-1}\Big(\sum_{k=1}^{j}({}^0R_{k-1}\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_k\Big)\times\Big[\Big(\sum_{k=1}^{j}{}^0\underset{\sim}{R}_{k-1}\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_k\Big)\Big]\times({}^0\underset{\sim}{R}_j\underset{\sim}{P}_j)]$$
$$+\Big(\sum_{j=1}^{i}{}^0\underset{\sim}{R}_{j-1}\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_j\Big)\times\Big[\Big(\sum_{j=1}^{i}{}^0\underset{\sim}{R}_{j-1}\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_j\Big)\times{}^0\underset{\sim}{R}_i(\underset{\sim}{P}_i+\underset{\sim}{S}_i)\Big]\qquad(6-5-29)$$

再由式(6-5-28),(6-5-29)形成式(6-5-14)形式的系统运动方程,即

$$\ddot{\underset{\sim}{U}}=\underset{\sim}{T}\ddot{\underset{\sim}{q}}+\underset{\sim}{D}\qquad(6-5-30)$$

式中

$$\ddot{\underset{\sim}{U}}=(\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1^T,\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2^T,\dot{\underset{\sim}{\omega}}_3^T,\dot{\underset{\sim}{V}}_{1c}^T,\dot{\underset{\sim}{V}}_{2c}^T,\dot{\underset{\sim}{V}}_{3c}^T)^T$$
$$\ddot{\underset{\sim}{q}}=(\ddot{q}_1,\ddot{q}_2,\ddot{q}_3)^T$$

$$\underset{\sim}{T}=\begin{bmatrix}
{}^1\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0 & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0}\\
{}^2\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0 & {}^2\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0 & \underset{\sim}{0}\\
{}^3\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0 & {}^3\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0 & {}^3\underset{\sim}{R}_2\underset{\sim}{Z}_0\\
-[{}^0\underset{\sim}{R}_1(P_1+\underset{\sim}{S}_1)]\times\underset{\sim}{Z}_0 & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0}\\
-[{}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{P}_1+{}^0\underset{\sim}{R}_2(\underset{\sim}{P}_2+\underset{\sim}{S}_2)]\times\underset{\sim}{Z}_0 & -[{}^0\underset{\sim}{R}_2(\underset{\sim}{P}_2+\underset{\sim}{S}_2)]\times({}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0) & \underset{\sim}{0}\\
-[{}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{P}_1+{}^0\underset{\sim}{R}_2\underset{\sim}{P}_2+{}^0\underset{\sim}{R}_3(\underset{\sim}{P}_3+\underset{\sim}{S}_3)]\times\underset{\sim}{Z}_0 & -[{}^0\underset{\sim}{R}_2\underset{\sim}{P}_2+{}^0\underset{\sim}{R}_3(\underset{\sim}{P}_3+\underset{\sim}{S}_3)]\times({}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0) & -[{}^0\underset{\sim}{R}_3(\underset{\sim}{P}_3+\underset{\sim}{S}_3)]\times({}^0\underset{\sim}{R}_2\underset{\sim}{Z}_0)
\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}=\begin{bmatrix}
\underset{\sim}{0}\\
({}^2\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1)\times({}^2\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)\\
({}^3\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1)\times({}^3\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)+({}^3\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1+{}^3\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)\times({}^3\underset{\sim}{R}_2\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_3)\\
(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1)\times[(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1)\times{}^0\underset{\sim}{R}_1(\underset{\sim}{P}_1+\underset{\sim}{S}_1)]\\
-{}^0\underset{\sim}{R}_2(\underset{\sim}{P}_2+\underset{\sim}{S}_2)\times[(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1)\times({}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)]+(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1)\times[(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1)\times({}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{P}_1)]\\
\qquad+(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1+{}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)\times[(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1+{}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)\times{}^0\underset{\sim}{R}_2(\underset{\sim}{P}_2+\underset{\sim}{S}_2)]\\
-({}^0\underset{\sim}{R}_2\underset{\sim}{P}_2)\times[(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1)\times({}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)]-[{}^0\underset{\sim}{R}_3(\underset{\sim}{P}_3+\underset{\sim}{S}_3)]\times[(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1)\times({}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)]\\
\qquad+(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1+{}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)\times({}^0\underset{\sim}{R}_2\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_3)]+(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1)\times[(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1)\times({}^0\underset{\sim}{R}_1P_1)]\\
\qquad+(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1+{}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)\times[(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1+{}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)\times({}^0\underset{\sim}{R}_2\underset{\sim}{P}_2)]\\
\qquad+(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1+{}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2+{}^0\underset{\sim}{R}_2\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_3)\times[(\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1+{}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2+{}^0\underset{\sim}{R}_2\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_3)\times{}^0\underset{\sim}{R}_3(\underset{\sim}{P}_3+\underset{\sim}{S}_3)]
\end{bmatrix}$$

3. 建立系统的动力学方程

用$\underset{\sim}{T}^T$左乘方程(6-5-27)两边,并将式(6-5-30)代入得

$$\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{T}\,\ddot{\underset{\sim}{q}}=-\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{f}-\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{D}+\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\tau}\qquad(6-5-31)$$

运算可证明$\underset{\sim}{T}^TB=I_{3\times3}$,因而

$$\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\tau}=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{G}(q)+\underset{\sim}{C}'(q,\dot{q});$$

$$\underset{\sim}{G}(q)=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{Z}_0^T\{{}^0\underset{\sim}{R}_1(\tilde{\underset{\sim}{P}}_1+\underset{\sim}{S}_1)^1\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0m_1g+[{}^0\underset{\sim}{R}_1\tilde{\underset{\sim}{P}}_1^1\underset{\sim}{R}_0\\ \quad+{}^0\underset{\sim}{R}_2(\tilde{\underset{\sim}{P}}_2+\underset{\sim}{S}_2)^2\underset{\sim}{R}_0]\underset{\sim}{Z}_0m_2g\\ \quad+\Big[\sum_{i=1}^{3}{}^0\underset{\sim}{R}_i\tilde{\underset{\sim}{P}}_i^i\underset{\sim}{R}_0+{}^0\underset{\sim}{R}_3\underset{\sim}{S}_3^3\underset{\sim}{R}_0\Big]\underset{\sim}{Z}_0m_3g\}\\ \underset{\sim}{Z}_0^T\{{}^1\underset{\sim}{R}_2(\tilde{\underset{\sim}{P}}_2+\underset{\sim}{S}_2)^2\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0m_2g+[{}^1\underset{\sim}{R}_2\tilde{\underset{\sim}{P}}_2^2\underset{\sim}{R}_0\\ \quad+{}^1\underset{\sim}{R}_3(\tilde{\underset{\sim}{P}}_3+\tilde{\underset{\sim}{S}}_3)^3\underset{\sim}{R}_0]\underset{\sim}{Z}_0m_3g\}\\ \underset{\sim}{Z}_0^T{}^2\underset{\sim}{R}_3(\tilde{\underset{\sim}{P}}_3+\tilde{\underset{\sim}{S}}_3)^3\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0m_3g\end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C}'(q,\dot{q})=\begin{Bmatrix}\tilde{\underset{\sim}{Z}}_0^T\{\tilde{\underset{\sim}{Z}}_0{}^0\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{J}_1{}^1\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_1^2+(\tilde{\underset{\sim}{Z}}_0{}^0\underset{\sim}{R}_2\dot{q}_1+{}^0\underset{\sim}{R}_1\tilde{\underset{\sim}{Z}}_0{}^1\underset{\sim}{R}_2\dot{q}_2)\underset{\sim}{J}_2({}^2\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0q_1+{}^2\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}\dot{q}_2)\\ \quad+\Big(\sum_{i=1}^{3}{}^0\underset{\sim}{R}_{i-1}\tilde{\underset{\sim}{Z}}_0{}^3\underset{\sim}{R}_{i-1}\dot{q}_i\Big)\underset{\sim}{J}_3\Big(\sum_{i=1}^{3}{}^3\underset{\sim}{R}_{i-1}\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_i\Big)\}\\ \underset{\sim}{Z}_0^T\{{}^1\underset{\sim}{R}_2(\tilde{\underset{\sim}{Z}}_0{}^0\underset{\sim}{R}_2q_1+\tilde{\underset{\sim}{Z}}_0{}^1\underset{\sim}{R}_2\dot{q}_2)\underset{\sim}{J}_2({}^2\underset{\sim}{R}_0\underset{\sim}{Z}_0q_1+{}^2\underset{\sim}{R}_1\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_2)\\ \quad+\Big(\sum_{i=1}^{3}{}^1\underset{\sim}{R}_{i-1}\tilde{\underset{\sim}{Z}}_0{}^{i-1}\underset{\sim}{R}_3\dot{q}_i\Big)\underset{\sim}{J}_3\Big(\sum_{i=1}^{4}{}^3\underset{\sim}{R}_{i-1}\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_i\Big)\}\\ \underset{\sim}{Z}_0^T\Big[\Big(\sum_{i=1}^{3}{}^2\underset{\sim}{R}_{i-1}\tilde{\underset{\sim}{Z}}_0{}^{i-1}\underset{\sim}{R}_3\dot{q}_i\Big)\underset{\sim}{J}_3\Big(\sum_{i=1}^{3}{}^3\underset{\sim}{R}_{i-1}\underset{\sim}{Z}_0\dot{q}_i\Big)\Big]\end{Bmatrix}$$

将式(6-5-31)动力学方程最终写成

$$\underset{\sim}{\tau}=\underset{\sim}{M}(q)\ddot{\underset{\sim}{q}}+\underset{\sim}{C}(q,\dot{q})+\underset{\sim}{G}(q)\qquad(6\text{-}5\text{-}32)$$

式中

$$\underset{\sim}{\tau}=\begin{Bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\end{Bmatrix},\quad q=\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{M}(q)=\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{T}$$

$$\underset{\sim}{C}(q,\dot{q})=\underset{\sim}{C}'(q,\dot{q})+\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{D}$$

4. 代入几何、物理及运动学参数

图6-30中的局部坐标系的3×3转换阵${}^i\underset{\sim}{R}_j$为

$${}^0\underset{\sim}{R}_1=\begin{bmatrix}c_1&0&-s_1\\ s_1&0&c_1\\ 0&-1&0\end{bmatrix}\qquad{}^1\underset{\sim}{R}_2=\begin{bmatrix}c_2&-s_2&0\\ s_2&c_2&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\qquad{}^2\underset{\sim}{R}_3=\begin{bmatrix}c_3&0&s_3\\ s_3&0&c_3\\ 0&1&0\end{bmatrix}$$

$$
{}^0\underset{\sim}{R}_2=\begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^0\underset{\sim}{R}_3=\begin{bmatrix} c_1c_{23} & -s_1 & c_1s_{23} \\ s_1c_{23} & c_1 & s_1s_{23} \\ -s_{23} & 1 & c_{23} \end{bmatrix}
$$

其中 $c_1=\cos q_i, s_1=\sin q_i, c_{ij}=\cos(q_i+q_j), s_{ij}=\sin(q_i+q_j)$.

各杆件动力学和 $D-H$ 参数杆件坐标系原点间位置矢量 $\vec{p}_i$ 见表6-1. 最后将方程(6-5-31)按上述参数展开化简得

$$
\tau_i=\sum_{j=1}^{3}M_{ij}(q)\ddot{q}_j+C_j(q,\dot{q})+G_j(q) \qquad i=1,2,3 \qquad (6-5-33)
$$

式中

$$
\begin{aligned}
M_{11}&=J_{1y}+J_{2x}s_2^2+J_{2y}c_2^2+J_{3x}s_{23}^2+J_{3x}J_{3x}c_{23}^2+m_1S_{1x}^2+m_2\{S_{2x}^2\\
&\quad+[(a_2+S_{2x})c_2-S_{2y}s_2]^2\}+m_3\{a_2^2c_2^2+(d_3+S_{3y})^2\\
&\quad+[S_{3y}s_{23}+(a_3+S_{3x})c_{23}]^2+2[S_{3y}s_{23}+(a_3+S_{3x})c_{23}]a_2c_2\}\\
M_{22}&=J_{2x}+J_{3y}+m_2[S_{2y}^2+(a_2+S_{2x})^2]+m_3\{a_2^2+S_{3x}^2+(a_3+S_{3x})^2\\
&\quad+2S_{3x}a_2s_3+2(a_3+S_{3x})a_2c_3\}\\
M_{33}&=J_{3y}+m_3[S_{3x}^2+(a_3+S_{3x})^2]\\
M_{12}&=M_{21}=m_2[S_{2y}S_{2x}c_2+(a_2+S_{2x})S_{2x}S_2]+m_3[(a_3+S_{3x})(d_3+S_{3y})s_{23}\\
&\quad-(d_3+S_{3y})S_{3y}c_{23}+(d_3+S_{3y})a_2s_2]\\
M_{13}&=M_{31}=m_3[(d_3+S_{3y})(a_3+S_{3x})S_{23}-(d_3+S_{3y})S_{3x}c_{23}]\\
M_{23}&=M_{32}=J_{3y}+m_3[S_{3x}a_2s_3+(a_3+S_{3x})a_2c_3+S_{3x}^2+(a_3+S_{3x})^2]\\
G_1&=0\\
G_2&=[S_{2y}s_2-(a_2+S_{2x})c_2]m_2g-[a_2c_2+S_{3x}s_{23}+(a_3+S_{3x})c_{23}]m_3g\\
G_3&=-[S_{3x}s_{23}+(a_3+S_{3x})c_{23}]m_3g\\
C_1&=+m_2[(a_2+S_{2x})S_{2x}c_2-S_{2x}^2s_2]\dot{q}_2^2+m_3[(d_3+S_{3y})a_2c_2+(a_3+S_{3x})(d_3+S_{3y})c_{23}\\
&\quad+(d_3+S_{3y})S_{3x}s_{23}]\dot{q}_2^2+m_3[(a_3+S_{3x})(d_3+S_{3y})c_{23}+(d_3+S_{3y})S_{3x}s_{23}]\dot{q}_3^2\\
&\quad+(2J_{2x}S_2c_2-2J_{2y}S_2c_2+2J_{3x}s_{23}c_{23}-2J_{3x}s_{23}c_{23})\dot{q}_1\dot{q}_2+m_2[2S_{2y}^2S_2c_2\\
&\quad-2(a_2+S_{2x})^2s_2c_2-2(a_2+S_{2x})S_{2y}c_2^2+2(a_2+S_{2x})S_{2y}s_2^2]\dot{q}_1\dot{q}_2+m_3[-2a_2^2s_2c_2\\
&\quad-2(a_3+S_{3x})a_2c_2s_{23}+2S_{3x}a_2c_2c_{23}-2S_{3x}a_2s_2s_{23}-2(a_3+S_{3x})a_2S_2c_{23}+2S_{3x}^2s_{23}c_{23}\\
&\quad-2(a_3+S_{3x})S_{3x}s_{23}^2-2(a_3+S_{3x})^2s_{23}c_{23}+2(a_3+S_{3x})S_{3y}c_{23}^2]\dot{q}_1\dot{q}_2+2(J_{3x}s_{23}c_{23}\\
&\quad-J_{3x}S_{3x}c_{23})\dot{q}_1\dot{q}_3+m_3[2S_{3x}a_2c_2c_{23}-2(a_3+S_{3x})a_2c_2s_{23}+2S_{3x}^2s_{23}c_{23}\\
&\quad-2(a_3+S_{3x})S_{3x}s_{23}^2-2(a_3+S_{3x})^2s_{23}c_{23}+2(a_3+S_{3x})S_{3x}c_{23}^2]\dot{q}_1\dot{q}_3\\
&\quad+2m_3[(a_3+S_{3x})c_{23}+S_{3x}s_{23}](d_3+S_{3y})\dot{q}_2\dot{q}_3\\
C_2&=(J_{2y}s_2c_2-J_{2x}s_2c_2+J_{3x}s_{23}c_{23}-J_{3x}s_{23}c_{23})\dot{q}_1^2-m_2[S_{2y}s_2c_2\\
&\quad-(a_2+S_{2x})S_{2y}c_2^2-(a_2+S_{2x})^2s_2c_2+(a_2+S_{2x})S_{2y}s_2^2]\dot{q}_1^2+m_3[a_2^2s_2c_2\\
&\quad+(a_3+S_{3x})a_2s_2c_{23}+a_2S_{3x}s_2s_{23}+(a_3+S_{3x})a_2c_2s_{23}-a_2S_{3x}c_2c_{23}\\
&\quad-(a_3+S_{3x})S_{3x}c_{23}^2-S_{3x}^2c_{23}s_{23}+(a_3+S_{3x})^2s_{23}c_{23}+(a_3\\
&\quad+S_{3x})S_{3x}s_{23}^2]\dot{q}_1^2+m_3[S_{3x}a_2c_3-(a_3+S_{3x})a_2s_3]\dot{q}_3^2\\
&\quad+2m_3[S_{3x}a_2c_3-(a_3+S_{3x})a_2s_3]\dot{q}_2\dot{q}_3\\
C_3&=(J_{3x}s_{23}c_{23}-J_{3x}s_{23}c_{23})\dot{q}_1^2+m_3[(a_3+S_{3x})a_2c_2s_{23}-a_2S_{3x}c_2c_{23}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (a_3 + S_{3x})S_{3x}c_{23}^2 - s_{3x}^2 c_{23}s_{23} \\
&+ (a_3 + S_{3x})^2 s_{23}c_{23} + (a_3 + S_{3x})S_{3x}s_{23}^2]\dot{q}_1^2 + m_3[- a_2 S_{3x}c_3 \\
&+ (a_3 + S_{3x})a_2 s_3]\dot{q}_2^2
\end{aligned}
$$

其中 J_i 是杆件关于质心的转动惯量阵，在 e_i 内描述.

表6-1 PUMA 562动力学、D－H 参数及杆件坐标系间位置矢量

关节 i	m_i (kg)	J_{xx} (kgm^2)	J_{yy} (kgm^2)	J_{zz} (kgm^2)	质心坐标(m) S_x	S_y	S_z	a_i (m)	α_i (rad)	d_i (m)	θ_j (rad)	P_x (m)	P_y (m)	P_z (m)
1	12.96	2.35	0.20	2.35	0.0	0.31	0.04	0.0	−1.57	0.0	q_1	0.0	0.0	0.0
2	22.37	1.33	4.32	3.38	−0.33	0.01	0.20	0.43	0.0	0.0	q_2	0.43	0.0	0.0
3	5.01	0.08	0.08	0.01	0.02	0.01	0.00	−0.02	1.57	0.15	q_3	−0.02	0.15	0.0

本节依据运动超曲线上的切空间与法空间正交性原理提出了建立约束系统动力学方程的方法. 运用该方法建立系统动力学方程，避免了分析力学诸如 Lagrange 方程、Kane 方程及 d'Alembert 原理中处理系统的能量函数、广义坐标和广义速度微分的困难，也克服了原 Newton 矢量力学形成系统动力学方程的完整解析表示式的困难及消除系统约束力的繁琐，而且各杆件之间的约束力不必出现在方程中. 该方法整个过程简单明了，概念清晰，而且标准化. 尤其对于机器人系统，通常它的运动学关系确定，因此可直接根据杆件运动方程求出切空间基底矩阵 $\underset{\sim}{T}$. 文中描述了该原理在机器人中的具体应用，并给出建立机械臂 PUMA 562动力学方程的实例.

§6. 约束多体系统动力学的两种递推子结构方法

两个或多个机器人协调工作属复杂多体系统，而且随着工作任务的变化，其协调形式即系统的整个结构形式也随之改变，相应的系统动力学方程也就改变.

迄今针对多机器人协调任务的复杂特性研究其动力学建模方面的文献甚少，只有[50][57]等针对两个机器人爪端固抓几种特定目标形成闭运动链的情况研究了动力学的建模问题，并且它们都是用传统的力学方法建立其动力学方程. 由于大系统的复杂性，通常以整体为对象用传统的方法建立其动力学方程非常困难. 为此，本节综合目前建立多体系统动力学方程的两大类方法的优点，即矢量力学的开放性(增加新构件不影响原系统方程结构)和分析力学的完善解析表示式，发展了一类建立复杂多体系统动力学方程的子结构正交法. 该法首先将系统按拓扑结构，如链状、树状或环状等分成若干子系统即子结构，并认为复杂大系统是由若干子系统通过一定的约束条件组合而成；然后考虑子结构之间的约束，组成大系统的约束动力学方程；最后运用前一章的正交性原理消除子结构之间的约束，形成系统的完美动力学解析表示式. 文中给出双机器人协调的应用实例.

§6.1 子结构综合的递归消约束法

设一个复杂的大系统按拓扑结构分为 n 个子系统，而每个子系统的动力学方程容易形成，设有如下形式：

$$\underset{\sim}{M}_i\ddot{\underset{\sim}{q}}^i = \underset{\sim}{F}_i + \underset{\sim}{u}_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{6-6-1}$$

式中 $q^i \in R^{n_i}$，M_i 为第 i 个子系统的广义质量阵；F_i 为第 i 个子系统的柯氏力、离心力和重力项；u_i 为第 i 个子系统的广义外力项；n_i 为第 i 个子系统的广义坐标数.

建立大系统的动力学方程，实质上是通过约束关系将各个系统综合成大系统的约束动力学方程，然后消除其约束力. 引用前一节的切空间与法空间正交性原理，可从如下两种途径完成上述过程.

首先，将第1和第2个子系统综合形成一个新的子系统，设它们之间的约束为

$$\underset{\sim}{C}_1(q^1, q^2) = 0 \tag{6-6-2}$$

其中 $C_1 \in R^{m_1}$，m_1 为约束方程的维数.

该两个子系统未受约束时动力学方程为

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{M}_1 & \\ & \underset{\sim}{M}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underset{\sim}{q}}^1 \\ \ddot{\underset{\sim}{q}}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{F}_1 \\ \underset{\sim}{F}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{u}_1 \\ \underset{\sim}{u}_2 \end{Bmatrix} \tag{6-6-3a}$$

简记为

$$\underset{\sim}{M}_{12}\ddot{\underset{\sim}{q}}^{12} = \underset{\sim}{F}_{12} + \underset{\sim}{u}_{12} \tag{6-6-3b}$$

当上述两个子系统，由方程(6-6-2)施加约束时，其动力学方程变为

$$\underset{\sim}{M}_{12}\ddot{\underset{\sim}{q}}^{12} = \underset{\sim}{F}_{12} + \underset{\sim}{u}_{12} + \underset{\sim}{J}_1^T \underset{\sim}{f}_1 \tag{6-6-4}$$

其中 $f_1 \in R^{m_1}$ 为约束力；

J_1 为方程(6-6-2)的约束 Jacobian 阵，J_1^T 即为约束曲线上法空间的基底.

选新系统的广义坐标为 $Q_2 \in R^{(n_1+n_2-m_1)}$，则

$$q^{12} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{Q}_2 \\ \underset{\sim}{X}_2(\underset{\sim}{Q}_2) \end{Bmatrix} \tag{6-6-5}$$

由前章可知，n_1+n_2 维位形空间中运动曲线切空间的基底为

$$\underset{\sim}{T}_{12} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I}_{(n_1+n_2-m_1)} \\ -\left(\dfrac{\partial \underset{\sim}{C}_1}{\partial \underset{\sim}{X}_2}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial \underset{\sim}{C}_1}{\partial \underset{\sim}{Q}_2}\right) \end{bmatrix} \tag{6-6-6}$$

因此有

$$\dot{\underset{\sim}{q}}^{12} = \underset{\sim}{T}_{12}\dot{\underset{\sim}{Q}}_2$$

$$\ddot{\underset{\sim}{q}}^{12} = \underset{\sim}{T}_{12}\ddot{\underset{\sim}{Q}}_2 + \underset{\sim}{D}_1 \qquad (D_1 = \dot{\underset{\sim}{T}}_{12}\dot{\underset{\sim}{Q}}_2) \tag{6-6-7}$$

用 T_{12}^T 左乘方程(6-6-4)两边，并把式(6-6-7)代入，再注意 $T_{12}^T J_1^T = 0$，得

$$\underset{\sim}{T}_{12}^T\underset{\sim}{M}_{12}\underset{\sim}{T}_{12}\ddot{\underset{\sim}{Q}}_2 = \underset{\sim}{T}_{12}^T(\underset{\sim}{F}_{12} - \underset{\sim}{M}_{12}\underset{\sim}{D}_1) + \underset{\sim}{T}_{12}^T\underset{\sim}{u}_{12} \tag{6-6-8a}$$

简记为

$$\underset{\sim}{M}_2\ddot{\underset{\sim}{Q}}_2 = \underset{\sim}{F}^2 + \underset{\sim}{u}^2 \tag{6-6-8b}$$

然后，按上述方法将其与第三个子系统综合，直到第 k 个子系统被综合，设方程形式如下：

$$\underset{\sim}{M}_k\ddot{\underset{\sim}{Q}}_k = \underset{\sim}{F}^k + \underset{\sim}{u}^k \tag{6-6-9}$$

式中 $\underset{\sim}{Q}_k \in R^{P_k}$，而 $P_k = \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k-1} m_i$.

设式(6-6-9)与第$(k+1)$个子系统之间的约束为

$$\underset{\sim}{C}_k(\underset{\sim}{Q}_k, q^{k+1}) = 0 \tag{6-6-10}$$

当未加约束时，式(6-6-9)与第$(k+1)$两个子系统的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{M}_k & \\ & \underset{\sim}{M}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underset{\sim}{Q}}_k \\ \ddot{\underset{\sim}{q}}^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{F}^k \\ \underset{\sim}{F}_{k+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{u}^k \\ \underset{\sim}{u}_{k+1} \end{Bmatrix} \tag{6-6-11a}$$

简记为

$$\underset{\sim}{M}_{k,(k+1)} \ddot{q}^{k(k+1)} = \underset{\sim}{F}_{k,(k+1)} + \underset{\sim}{u}_{k,(k+1)} \tag{6-6-11b}$$

当施加式(6-6-10)约束后，其动力学方程变为

$$\underset{\sim}{M}_{k,(k+1)} \ddot{\underset{\sim}{q}}^{k(k+1)} = \underset{\sim}{F}_{k,(k+1)} + \underset{\sim}{u}_{k,(k+1)} + \underset{\sim}{J}_k^T \underset{\sim}{f}_k \tag{6-6-12}$$

式中

$$\underset{\sim}{f}_k \in R^{m_k}$$

$\underset{\sim}{J}_k$ 为方程(6-6-10)的约束 Jacobian 阵，$\underset{\sim}{J}_k^T$ 即为约束曲线上法空间的基底.

选 $\underset{\sim}{Q}_{k+1} \in R^{P_{k+1}}\left(P_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} n_i - \sum_{i=1}^{k} m_i\right)$ 为新组成系统的广义坐标，有

$$q^{k(k+1)} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{Q}_{k+1} \\ \underset{\sim}{X}_{k+1}(\underset{\sim}{Q}_{k+1}) \end{bmatrix} \tag{6-6-13}$$

同理运动超曲线切空间的基底为

$$T_{k,(k+1)} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I}_{(P_{k+1} \times P_{k+1})} \\ -\left(\dfrac{\partial \underset{\sim}{C}_k}{\partial \underset{\sim}{X}_{k+1}}\right)^{-1} \left(\dfrac{\partial \underset{\sim}{C}_k}{\partial \underset{\sim}{Q}_{k+1}}\right) \end{bmatrix} \tag{6-6-14}$$

因此有

$$\begin{aligned} \dot{q}^{k(k+1)} &= \underset{\sim}{T}_{k,(k+1)} \dot{\underset{\sim}{Q}}_{k+1} \\ \ddot{q}^{k(k+1)} &= \underset{\sim}{T}_{k,(k+1)} \ddot{\underset{\sim}{Q}}_{k+1} + \underset{\sim}{D}_k \quad (\underset{\sim}{D}_k = \dot{\underset{\sim}{T}}_{k,(k+1)} \dot{\underset{\sim}{Q}}_{k+1}) \end{aligned} \tag{6-6-15}$$

用 $\underset{\sim}{T}^T_{k,(k+1)}$ 左乘方程(6-6-12)两边，并将式(6-6-15)代入得

$$\underset{\sim}{T}^T_{k(k+1)} \underset{\sim}{M}_{k,(k+1)} \underset{\sim}{T}_{k,(k+1)} \ddot{\underset{\sim}{Q}}_{k+1} = \underset{\sim}{T}^T_{k,(k+1)} (\underset{\sim}{F}_{k,(k+1)} - \underset{\sim}{M}_{k,(k+1)} \underset{\sim}{D}_k) + \underset{\sim}{T}^T_{k,(k+1)} \underset{\sim}{u}_{k,(k+1)} \tag{6-6-16a}$$

简记

$$\underset{\sim}{M}_{k+1} \ddot{\underset{\sim}{Q}}_{k+1} = \underset{\sim}{F}^{k+1} + \underset{\sim}{u}^{k+1} \tag{6-6-16b}$$

继续重复上述递归过程，直至第 n 个子系统被综合，即获得整个系统的动力学方程.

§6.2 子结构综合的一次消约束法

设 n 个子结构组成大系统，所受约束方程为

$$\underset{\sim}{C}(q) = 0 \tag{6-6-17}$$

其中 $\underset{\sim}{C} \in R^m$，$m$ 是约束方程的维数.

首先，将系统内 n 个子系统的动力学方程组合成大系统的约束动力学方程：

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{q}}=\underset{\sim}{F}+\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{J}^{T}\underset{\sim}{f} \tag{6-6-18}$$

式中 $\underset{\sim}{M}=\mathrm{diag}(\underset{\sim}{M}_1,\underset{\sim}{M}_2,\cdots,\underset{\sim}{M}_n)$

$\underset{\sim}{F}=(\underset{\sim}{F}_1^T,\underset{\sim}{F}_2^T,\cdots,\underset{\sim}{F}_n^T)$

$\underset{\sim}{u}=(\underset{\sim}{u}_1^T,\underset{\sim}{u}_2^T,\cdots,\underset{\sim}{u}_n^T)^T$

$\underset{\sim}{q}=(\underset{\sim}{q}_1^T,\underset{\sim}{q}_2^T,\cdots,\underset{\sim}{q}_n^T)^T$

$\underset{\sim}{f}\in R^m$ 为约束力；$\underset{\sim}{J}$为方程(6-6-17)的约束 Jacobi 阵.

设大系统的广义坐标为 $\underset{\sim}{Q}\in R^{p-m}\left(p=\sum_{i=1}^{n}n_i\right)$，则有

$$\underset{\sim}{q}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{Q}\\ \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{Q})\end{bmatrix} \tag{6-6-19}$$

由上节可得，系统运动超曲线切空间的基底为

$$T=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{I}_{(p-m)}\\ -\left(\dfrac{\partial\underset{\sim}{C}}{\partial\underset{\sim}{X}}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial\underset{\sim}{C}}{\partial\underset{\sim}{Q}}\right)\end{bmatrix} \tag{6-6-20}$$

因此有

$$\dot{\underset{\sim}{q}}=\underset{\sim}{T}\dot{\underset{\sim}{Q}}$$

$$\ddot{\underset{\sim}{q}}=\underset{\sim}{T}\ddot{\underset{\sim}{Q}}+\underset{\sim}{D}\quad(\underset{\sim}{D}=\dot{\underset{\sim}{T}}\dot{\underset{\sim}{Q}}) \tag{6-6-21}$$

用 $\underset{\sim}{T}^T$ 左乘方程(6-6-18)两边，并把式(6-6-21)代入得

$$\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}\ddot{\underset{\sim}{Q}}=\underset{\sim}{T}^T(\underset{\sim}{F}-\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{D})+\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{u} \tag{6-6-22a}$$

简记为

$$\hat{\underset{\sim}{M}}\ddot{\underset{\sim}{Q}}=\hat{\underset{\sim}{F}}+\hat{\underset{\sim}{u}} \tag{6-6-22b}$$

式(6-6-22)即为所求系统的动力学方程.

§6.3 子结构综合方法的应用

运用上节原理建立多机器人协调系统的动力学方程，主要分三步进行. 第一，根据拓扑结构将各机器人和操作目标分成若干子结构，并建立其动力学方程；第二，根据各子结构的运动学关系，建立其切空间的其底；第三，运用上节的子结构综合法即形成系统的动力学方程.

为演示上述原理，本节建立由两个 n 关节机械臂搬运一个刚性物体形成闭运动链的系统动力学方程. 系统构形图如图6-21所示. 首先将系统分为三个子系统，即两个手臂和操作物体. 对一个确定的机械臂来讲，通常其动力学方程是容易得到的，设两个手臂的动力学方程如下：

$$\begin{aligned}{}^1\underset{\sim}{M}{}^1\ddot{\underset{\sim}{q}}&={}^1\underset{\sim}{C}+{}^1\underset{\sim}{\tau}+{}^1\underset{\sim}{J}^{T1}\underset{\sim}{f}\\ {}^2\underset{\sim}{M}{}^2\ddot{\underset{\sim}{q}}&={}^2\underset{\sim}{C}+{}^2\underset{\sim}{\tau}+{}^2\underset{\sim}{J}^{T2}\underset{\sim}{f}\end{aligned} \tag{6-6-23}$$

式中${}^i\underset{\sim}{M}$为手臂 i 的广义质量阵；${}^i\underset{\sim}{C}$为手臂 i 的柯氏力、离心力及重力项；${}^i\underset{\sim}{\tau}$为手臂 i 的广义驱动力；${}^i\underset{\sim}{f}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{F}_{in}\\ \underset{\sim}{N}_{in}\end{bmatrix}$为手臂 i 的爪端作用外力(矩)；${}^i\underset{\sim}{q}\in R^n$ 为手臂 i 的广义坐标；${}^i\underset{\sim}{J}$为手臂 i

的 Jacobi 矩阵.

被操作物体如图6-22所示，其 Newton-Euler 方程为

$$\begin{cases} \underset{\sim}{J}_c\dot{\underset{\sim}{\omega}}_c = -\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_c\underset{\sim}{J}_c\underset{\sim}{\omega}_c - \tilde{\underset{\sim}{L}}_1^0\underset{\sim}{R}_c^T\underset{\sim}{F}_{1n} - \tilde{\underset{\sim}{L}}_2^0\underset{\sim}{R}_c^T\underset{\sim}{F}_{2n} - {}^0\underset{\sim}{R}_c^T\underset{\sim}{N}_{1n} - {}^0\underset{\sim}{R}_c^T\underset{\sim}{N}_{2n} \\ \underset{\sim}{M}_c\ddot{\underset{\sim}{X}}_c = -\underset{\sim}{M}_c\underset{\sim}{g} - \underset{\sim}{F}_{1n} - \underset{\sim}{F}_{2n} \end{cases} \tag{6-6-24}$$

式中 $\underset{\sim}{F}_{in}$，$\underset{\sim}{N}_{in}$，$\ddot{\underset{\sim}{X}}_c$，$\underset{\sim}{g}$在惯性坐标系 e_0内描述；$\underset{\sim}{\omega}_c$，$\dot{\underset{\sim}{\omega}}_c$，$\underset{\sim}{J}_c$，$\underset{\sim}{L}_j$ 在局部坐标系 e_c 内描述；${}^i\underset{\sim}{R}_j$ 为坐标系 e_j 至 e_i 的转换阵.

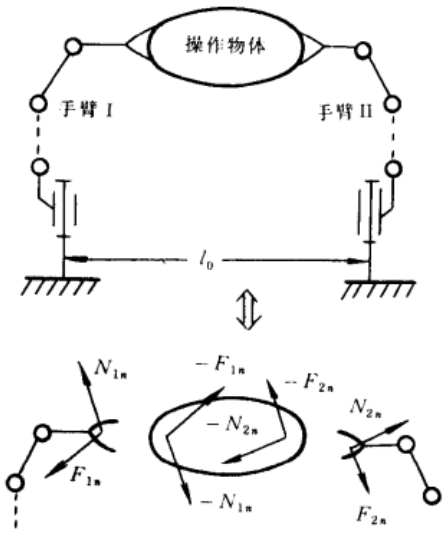


图6-21　双机械臂搬运单一物体构形图

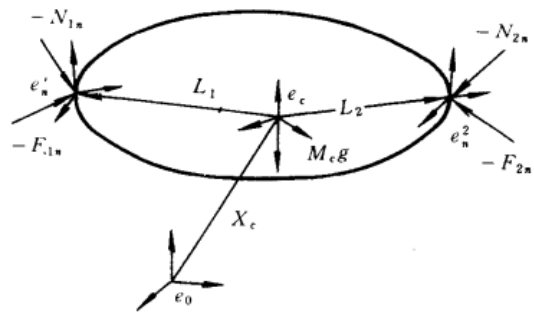


图6-22　被操作物体受力简图

消除三个子结构之间的广义约束力 $\underset{\sim}{F}_{in}$，$\underset{\sim}{N}_{in}(i=1,2)$，可采用上节提供的两种方法，由于大系统的子结构不复杂，本节采用第二种方法即一次消除约束法. 先将三个子结构动力学方程(6-6-23)，(6-6-24)组合形成有约束系统的动力学方程如下：

$$\underset{\sim}{K}\ddot{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{F}' + \underset{\sim}{\tau}' \tag{6-6-25}$$

式中

$$\underset{\sim}{K} = \mathrm{diag}({}^1\underset{\sim}{M}, \underset{\sim}{J}_c, \underset{\sim}{M}_c, {}^2\underset{\sim}{M}), \quad \ddot{\underset{\sim}{Y}} = ({}^1\ddot{\underset{\sim}{q}}^T, \dot{\underset{\sim}{\omega}}_c^T, \ddot{\underset{\sim}{X}}_c^T, {}^2\ddot{\underset{\sim}{q}}^T)^T$$

$$\underset{\sim}{F}' = [{}^1\underset{\sim}{C}^T, -(\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_c\underset{\sim}{J}_c\underset{\sim}{\omega}_c)^T, -(\underset{\sim}{M}_c\underset{\sim}{g})^T, {}^2\underset{\sim}{C}^T]^T, \quad \underset{\sim}{\tau}' = ({}^1\underset{\sim}{\tau}^T, \underset{\sim}{O}_{1\times 6}, {}^2\underset{\sim}{\tau}^T)^T$$

方程(6-6-25)中没有出现约束力，因为用上述原理形成最后的系统方程时将被消去而不影响结果. 由于系统的自由度与提供系统的约束情况有关，则两个 n 自由度机械臂搬运一个刚性物体形成闭运动链的系统自由度由下式确定：

$$\mathrm{Dof} = 2n + 6 - (c_1 + c_2) \tag{6-6-26}$$

式中 n 为机械臂自由度数；c_1，c_2为机械臂 Ⅰ、Ⅱ 与操作物接触所提供的约束数目.

表6.2列出了机械臂爪端与操作物的三种不同接触形式系统的自由度数. 当两个机械臂爪端与目标均为点接触时，三个子结构之间的广义约束力矩 $\underset{\sim}{N}_{in}=0(i=1,2)$，而约束力

$\underset{\sim}{F}_{in}(i=1,2)$是6维，操作物体动力学方程(6-6-24)刚好6维，因此选取 $q=({}^1q^T,{}^2q^T)^T$ 为系统广义坐标，实现式(6-6-25)的降维即消除子结构的约束.

表6-2 手臂爪端与目标三种接触形式系统的自由度数

	接触形式								
手臂 I 与目标	固抓 $C_1=6$			铰接触转动副 $C_1=5$			点接触球面副 $C_1=3$		
手臂 I 与目标	固抓 $C_2=6$	铰接触转动副 $C_2=5$	点接触球面副 $C_2=3$	固抓 $C_2=6$	铰接触转动副 $C_2=5$	点接触球面副 $C_2=3$	固抓 $C_2=6$	铰接触转动副 $C_2=5$	点接触球面副 $C_2=3$
系统自由度 Dof	$2n-6$	$2n-5$	$2n-3$	$2n-5$	$2n-4$	$2n-2$	$2n-3$	$2n-2$	$2n$

现在建立系统的运动学约束关系，即求切空间的基底 $\underset{\sim}{T}$. 图6-21和图6-22所示系统的约束条件为

$$\sum_{i=1}^{n}{}^0\underset{\sim}{R}_i^1\underset{\sim}{P}_i^1+{}^0\underset{\sim}{R}_c(\underset{\sim}{L}_2-\underset{\sim}{L}_1)+\sum_{i=1}^{n}{}^0\underset{\sim}{R}_i^2\underset{\sim}{P}_i^2=\underset{\sim}{L}_0 \tag{6-6-27}$$

对式(6-6-27)微分得

$$-\sum_{i=1}^{n}({}^0\underset{\sim}{R}_i^1\underset{\sim}{P}_i^1)\times({}^0\underset{\sim}{R}_i^1\underset{\sim}{\omega}_i^1)-[{}^0\underset{\sim}{R}_c(\underset{\sim}{L}_2-\underset{\sim}{L}_1)]\times({}^0\underset{\sim}{R}_c\underset{\sim}{\omega}_c)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}({}^0\underset{\sim}{R}_i^2\underset{\sim}{P}_i^2)\times({}^0\underset{\sim}{R}_i^2\underset{\sim}{\omega}_i^2)=0$$

对上式再微分一次得

$$\sum_{i=1}^{n}({}^0\underset{\sim}{R}_i^1\underset{\sim}{P}_i^1)\times({}^0\underset{\sim}{R}_i^1\dot{\underset{\sim}{\omega}}_i^1)+[{}^0\underset{\sim}{R}_c(\underset{\sim}{L}_2-\underset{\sim}{L}_1)]\times({}^0\underset{\sim}{R}_c\dot{\underset{\sim}{\omega}}_c)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}({}^0\underset{\sim}{R}_i^2\underset{\sim}{P}_i^2)\times({}^0\underset{\sim}{R}_i^2\dot{\underset{\sim}{\omega}}_i^2)+\sum_{i=1}^{n}({}^0\underset{\sim}{R}_i^1\underset{\sim}{\omega}_i^1)\times[({}^0\underset{\sim}{R}_i^1\underset{\sim}{P}_i^1)\times({}^0\underset{\sim}{R}_i^1\underset{\sim}{\omega}_i^1)]$$

$$+\sum_{i=1}^{n}({}^0\underset{\sim}{R}_i^2\underset{\sim}{\omega}_i^2)\times[({}^0\underset{\sim}{R}_i^2\underset{\sim}{P}_i^2)\times({}^0\underset{\sim}{R}_i^2\underset{\sim}{\omega}_i^2)]$$

$$+({}^0\underset{\sim}{R}_c\underset{\sim}{\omega}_c)\times\{[{}^0\underset{\sim}{R}_c(\underset{\sim}{L}_2-\underset{\sim}{L}_1)]\times({}^0\underset{\sim}{R}_c\underset{\sim}{\omega}_c)\}=0 \tag{6-6-28}$$

由式(6-6-28)可得如下运动学关系：

$$\ddot{\underset{\sim}{Y}}=\underset{\sim}{T}\ddot{\underset{\sim}{q}}+\ddot{\underset{\sim}{D}} \tag{6-6-29}$$

式中切空间的基底为

$\underset{\sim}{T}=$

$$\begin{bmatrix} & \underset{\sim}{L}_{n\times n} & & \underset{\sim}{Q}_{n\times n} & \\ ({}^0\underset{\sim}{R}_i^T-\underset{\sim}{a}_1)\underset{\sim}{Z}_0 & ({}^0R_i^T+\underset{\sim}{a}_2)\underset{\sim}{Z}_0 \quad\cdots\quad ({}^{n-1}\underset{\sim}{R}_i^T+\underset{\sim}{a}_n)\underset{\sim}{Z}_0 & \underset{\sim}{b}_1\underset{\sim}{Z}_0 & \underset{\sim}{b}_2\underset{\sim}{Z}_0\cdots\underset{\sim}{b}_n\underset{\sim}{Z}_0 \\ {}^0\underset{\sim}{R}_c\tilde{\underset{\sim}{L}}_2({}^0\underset{\sim}{R}_i^T+\underset{\sim}{a}_1)\underset{\sim}{Z}_0 & {}^0\underset{\sim}{R}_c\tilde{\underset{\sim}{L}}_2({}^1\underset{\sim}{R}_i^T+\underset{\sim}{a}_2)\underset{\sim}{Z}_0\cdots{}^0\underset{\sim}{R}_c\tilde{\underset{\sim}{L}}_2({}^{n-1}\underset{\sim}{R}_i^T+\underset{\sim}{a}_n)\underset{\sim}{Z}_0 & {}^0\underset{\sim}{R}_c\underset{\sim}{L}_1\underset{\sim}{b}_1\underset{\sim}{Z}_0 & {}^0R_c\tilde{\underset{\sim}{L}}_1\underset{\sim}{b}_2\underset{\sim}{Z}_0\cdots{}^0\underset{\sim}{R}_c\tilde{\underset{\sim}{L}}_1\underset{\sim}{b}_n\underset{\sim}{Z}_0 \\ & \underset{\sim}{Q}_{n\times n} & & \underset{\sim}{I}_{n\times n} & \end{bmatrix}_{(2n+6)\times 2n}$$

(6-6-30)

其中

$$\underset{\sim}{a}_1=-[{}^0\underset{\sim}{R}_c(\tilde{\underset{\sim}{L}}_2-\tilde{\underset{\sim}{L}}_1)]^{-1}[{}^0\underset{\sim}{R}_1\,{}^1\tilde{\underset{\sim}{P}}_1^1\,{}^0\underset{\sim}{R}_1^{1T}+{}^0\underset{\sim}{R}_2\,{}^1\tilde{\underset{\sim}{P}}_2^1\,{}^0\underset{\sim}{R}_2^{1T}+\cdots$$

$$+ {}^0\underset{\sim}{R}_n^1\underset{\sim}{P}_n^1\,{}^0\underset{\sim}{R}_n^{1T} + {}^0\underset{\sim}{R}_c(\tilde{\underset{\sim}{L}}_2 - \tilde{\underset{\sim}{L}}_1)\,{}^0\underset{\sim}{R}_c^T]$$

$$\underset{\sim}{a}_2 = -[{}^0\underset{\sim}{R}_c(\tilde{\underset{\sim}{L}}_2 - \tilde{\underset{\sim}{L}}_1)]^{-1}[{}^0\underset{\sim}{R}_2^1\tilde{\underset{\sim}{P}}_2^{11}\underset{\sim}{R}_2^{1T} + \cdots {}^0\underset{\sim}{R}_n{}^1\tilde{\underset{\sim}{P}}_n^{11}\underset{\sim}{R}_n^{1T}$$

$$+ {}^0\underset{\sim}{R}_c(\tilde{\underset{\sim}{L}}_2 - \tilde{\underset{\sim}{L}}_1)\,{}^1\underset{\sim}{R}_c^T]$$

$$\underset{\sim}{a}_n = -[{}^0\underset{\sim}{R}_c(\tilde{\underset{\sim}{L}}_2 - \tilde{\underset{\sim}{L}}_1)]^{-1}[{}^0\underset{\sim}{R}_n^1\tilde{\underset{\sim}{P}}_n^{1n-1}\underset{\sim}{R}_n^{1T} + {}^0\underset{\sim}{R}_c(\tilde{\underset{\sim}{L}}_2 - \tilde{\underset{\sim}{L}}_1)^{n-1}\underset{\sim}{R}_c^T]$$

$$\underset{\sim}{b}_1 = -[{}^0\underset{\sim}{R}_c(\tilde{\underset{\sim}{L}}_2 - \tilde{\underset{\sim}{L}}_1)]^{-1}[{}^0\underset{\sim}{R}_1^2\tilde{\underset{\sim}{P}}_1^2\,{}^0\underset{\sim}{R}_1^{2T} + {}^0\underset{\sim}{R}_2^2\tilde{\underset{\sim}{P}}_2^2\,{}^0\underset{\sim}{R}_2^{2T} + \cdots + {}^0\underset{\sim}{R}_n^2\tilde{\underset{\sim}{P}}_n^2\,{}^0\underset{\sim}{R}_n^{2T}]$$

$$\underset{\sim}{b}_2 = -[{}^0\underset{\sim}{R}_c(\tilde{\underset{\sim}{L}}_2 - \tilde{\underset{\sim}{L}}_1)]^{-1}[{}^0\underset{\sim}{R}_2^2\tilde{\underset{\sim}{P}}_2^2\,{}^1\underset{\sim}{R}_2^{2T} + \cdots + {}^1\underset{\sim}{R}_n^2\tilde{\underset{\sim}{P}}_n^{21}\underset{\sim}{R}_n^{2T}]$$

$$\underset{\sim}{b}_n = -[{}^0\underset{\sim}{R}_c(\tilde{\underset{\sim}{L}}_2 - \tilde{\underset{\sim}{L}}_1)]^{-1}[{}^0\underset{\sim}{R}_n^{22}\tilde{\underset{\sim}{P}}_n^{2n-1}\underset{\sim}{R}_n^{2T}]$$

$${}^i\underset{\sim}{J}^T = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{Z}_0^T({}^0\underset{\sim}{R}_1^i\tilde{\underset{\sim}{P}}_1^i\,{}^0\underset{\sim}{R}_1^{iT} + {}^0\underset{\sim}{R}_2^i\tilde{\underset{\sim}{P}}_2^{i0}\underset{\sim}{R}_2^{iT} + \cdots + {}^0\underset{\sim}{R}_n^i\tilde{\underset{\sim}{P}}_n^{i\,0}\underset{\sim}{R}_n^{iT}) & \underset{\sim}{Z}_0^T \\ \underset{\sim}{Z}_0^T({}^1\underset{\sim}{R}_2^i\tilde{\underset{\sim}{P}}_2^i\,{}^0\underset{\sim}{R}_2^{iT} + \cdots + {}^1\underset{\sim}{R}_n^i\tilde{\underset{\sim}{P}}_n^i\,{}^0\underset{\sim}{R}_n^{iT}) & \underset{\sim}{Z}_0^T\,{}^0\underset{\sim}{R}_1^{iT} \\ \vdots & \vdots \\ \underset{\sim}{Z}_0^{Tn-1}\underset{\sim}{R}_n^i\tilde{\underset{\sim}{P}}_n^i\,{}^0\underset{\sim}{R}_n^{iT} & \underset{\sim}{Z}_0^T\,{}^0\underset{\sim}{R}_{n-1}^{iT} \end{bmatrix}_{n\times 6}$$

$$(i = 1,2)$$

用式(6-6-30)的 $\underset{\sim}{T}^T$ 左乘方程(6-6-25)两边，并将式(6-6-29)代入得双机械臂协调系统动力学方程如下：

$$\underset{\sim}{M}\,\ddot{\underset{\sim}{q}} = \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{\tau} \qquad (6-6-31)$$

式中 $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{T}$ 为系统广义质量阵；

$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{F}' - \underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{K}\dot{\underset{\sim}{T}}\underset{\sim}{D}$ 为系统受的柯氏力、离心力和重力项；

$\underset{\sim}{\tau} = ({}^1\underset{\sim}{\tau}^T, {}^2\underset{\sim}{\tau}^T)^T$ 为系统的广义驱动力.

本节发展的子结构正交法，为复杂多体系统的动力学方程的建立提供一种有效的途径，它避免了以整体为对象建立其动力学方程的繁琐和困难. 由于将复杂系统按相似拓扑结构划分成若干子结构分别建立其动力学方程，然后通过它们的运动学关系建立其切空间的基底，利用切空间与法空间正交性原理即可将子结构的动力学方程综合成大系统的动力学方程，而且子结构之间的约束力不必出现在方程中. 通过上节的推导可以看出，此方法能快速形成封闭形式的动力学方程，而又具有开放性. 当工作环境和载荷结构改变时，只须将该子结构的模型改变，并建立相应的运动学约束方程即可. 该方法可使复杂结构简单化，且推导过程简单而标准化、物理概念清晰，便于计算机实现，尤其适于多机器人协调系统中的工作任务复杂多变的情况.

§7. 多机器人捕捉公共目标的协调关节轨迹规划

对于机器人系统来说，完成或实现某种作业实质上是使机器人跟踪期望路径的控制问题. 机器人控制问题包含着两个相关联的子问题——运动(或轨迹)规划和运动控制. 运

动轨迹是机器人系统工作的依据，它决定了系统的工作方式和效率，机器人系统要完成某种操作作业，就必须对其运动轨迹进行规划和协调，因此研究机器人系统运动轨迹的规划尤为重要.

§7.1 机器人的无因次归一化关节轨迹

设系统内多个具有 n 关节的机器人，在捕捉某一公共目标时，其关节坐标从 q_0 变化到 q_t，运行时间为 τ（未知量）. 系统在捕捉目标时，我们所关心的是各机器人的爪端接近目标时的终了效果. 因此在可达空间内只需考虑关节空间的运动轨迹，并将各机器人的关节坐标和运行时间均进行归一化处理，即表示成无因次量的形式，定义如下：

$$S = \frac{(q - q_0)}{(q_t - q_0)}$$

$$T = \frac{t}{\tau} \tag{6-7-1}$$

式中 $q \in [q_0, q_t]$，$t \in [0, \tau]$ 为机器人关节坐标和运动时间；$S \in [0,1]$，$T \in [0,1]$ 为机器人关节坐标的相对位移和时间.

通过上述处理，轨迹规划问题就变成以 T 为自变量规划 S 的运动轨迹，显然它不依赖系统的实际运动时间. 我们将整个运动过程分为加速、等速和减速三个运动区段，为使所规划的运动轨迹具有良好的实现性，其运动的加速度应平稳变化，所以首先给出运动规律的二阶导数，即

$$A = \begin{cases} A_m \sin(\omega_1 T) & T \in [0, \lambda_1] \\ 0 & T \in [\lambda_1, \lambda_2] \\ -A_m \sin[\omega_2 (T - \lambda_2)] & T \in [\lambda_2, 1] \end{cases} \tag{6-7-2}$$

式中 $\omega_1 = \pi/\lambda_1$，$\omega_2 = \pi/(1-\lambda_2)$，$A_m$ 为 A 的幅值.

对式(6-7-2)积分可得其一阶导数和轨迹函数如下：

$$V = \begin{cases} \dfrac{A_m}{\omega_1}[1 - \cos(\omega_1 T)] & T \in [0, \lambda_1] \\ \dfrac{2A_m}{\omega_1} & T \in [\lambda_1, \lambda_2] \\ \dfrac{2A_m}{\omega_1} + \dfrac{A_m}{\omega_2}[\cos\omega_2 (T - \lambda_2) - 1] & T \in [\lambda_2, 1] \end{cases} \tag{6-7-3}$$

$$S = \begin{cases} \dfrac{A_m}{\omega_1} T - \dfrac{A_m}{\omega_1^2} \sin(\omega_1 T) & T \in [0, \lambda_1] \\ \dfrac{2A_m}{\omega_1} T - \dfrac{A_m}{\omega_1} \lambda_1 & T \in [\lambda_1, \lambda_2] \\ \dfrac{A_m}{\omega_1^2} \sin[\omega_2 (T - \lambda_2)] + \left(\dfrac{2A_m}{\omega_1} - \dfrac{A_m}{\omega_2} \right) T + \dfrac{A_m}{\omega_2} \lambda_2 - \dfrac{A_m}{\omega_1} \lambda_1 & T \in [\lambda_2, l] \end{cases} \tag{6-7-4}$$

为保证机器人能平稳一致到位，根据无因次量的定义，当 $T=1$ 时，选取 $V=0$，$S=1$，由式(6-7-3)和(6-7-4)得下式：

$$\begin{cases}\dfrac{2A_m}{\omega_1}-\dfrac{2A_m}{\omega_2}=0\\ \dfrac{2A_m}{\omega_1}-\dfrac{A_m}{\omega_2}+\dfrac{A_m}{\omega_2}\lambda_2-\dfrac{A_m}{\omega_1}\lambda_1=1\end{cases}\tag{6-7-5}$$

解方程组(6-7-5)得

$$\begin{cases}A_m=\dfrac{\pi}{\lambda_1(2-\lambda_1)-(1-\lambda_2)^2}\\ \lambda_1=1-\lambda_2\end{cases}\tag{6-7-6}$$

将式(6-7-6)代入式(6-7-2)—(6-7-4)可见，整个无因次轨迹曲线的特性完全由 λ_1 和 λ_2 决定，因此最优轨迹规划就是优化 λ_1 和 λ_2，为保证所规划的运动轨迹最优，必须在保证轨迹曲线连续光滑和平稳到位的条件下，尽可能降低 A_m，增加匀速运动时间. 最后选取轨迹曲线的优化目标函数和约束条件如下：

$$\begin{aligned}J&=a_1A_m+\frac{a_2}{(\lambda_2-\lambda_1)}\\&=\frac{a_1\pi}{\lambda_1(2-\lambda_1)-(1-\lambda_2)^2}+\frac{a_2}{\lambda_2-\lambda_1}\end{aligned}\tag{6-7-7}$$

$$\begin{cases}\lambda_1=1-\lambda_2\\ \lambda_1>0\\ \lambda_2>\lambda_1\\ \lambda_2<1\end{cases}$$

式中 a_1，a_2 为加权系数.

对式(6-7-7)，在选取加权系数 a_1，a_2 后，可采用一种合适的算法优化出 λ_1 和 λ_2 的值. 文中采用可变误差多面体算法[22]，取 $a_1=2$，$a_2=1$，初值 $\lambda_1=0.3$，$\lambda_2=0.7$，优化结果得 $\lambda_1=0.338$，$\lambda_2=0.662$. 则 $A_m=7.02$，$\omega_1=9.295$，$\omega_2=9.295$.

将以上参数代入式(6-7-4)即得系统无因次轨迹函数，可将其作为机器人的通用轨迹发生器，按下式产生系统实际轨迹的跟踪指令：

$$q=S\cdot(q_t-q_0)+q_0\tag{6-7-8}$$

§7.2 规划轨迹的机器人约束条件

通常机器人本身的约束条件主要分两类：Ⅰ. 机器人关节的最大速度和加速度是定常的约束，即运动学约束；Ⅱ. 将机器人关节驱动力矩作为约束条件，在轨迹规划过程中将机器人的动力学方程考虑进去，即动力学约束.

运动学约束，对于特定的工业机器人来说是已知的，也就是其关节速度和加速度的极限值 $\dot{q}^d_{\max}$，$\ddot{q}^d_{\max}$ 均已知，因此有如下运动学约束方程：

$$\begin{cases}\dot{q}\leqslant\dot{q}^d_{\max}\\ \ddot{q}\leqslant\ddot{q}^d_{\max}\end{cases}\tag{6-7-9}$$

式(6-7-9)即为多机器人捕捉公共目标协调关节轨迹规划的运动学约束条件. 由于关节的最大速度和加速度是与机器人的运动位置、负载等有直接关系，因此这些约束均是在极端情况导出的，所以它不能保证机器人在空载时的轨迹最优.

对于动力学约束来说，虽具有一定的科学性，理论上可以实现，但由于机器人动力学方程是时变，耦合和强非线性的方程，计算量非常大，目前的机器人处理系统还无法将其作为约束方程进行实时在线轨迹规划的运算. 因此必须对机器人动力学方程进行简化处理，以提高其计算效率. 设系统内两个具有 n 关节的机器人动力学方程具有如下形式：

$$
{}^{i}u_j = \sum_{k=1}^{n} {}^{i}D_{jk}(q)\ddot{q}_k + \sum_{k=1,\,l=1}^{n}\sum^{n} {}^{i}C_{jkl}(q)\dot{q}_k\dot{q}_l + {}^{i}G_j(q)
$$

$$
(j = 1,2,\cdots,n;i = 1,2,m) \tag{6-7-10}
$$

式中 $q\in R^n$ 为机器人的广义关节坐标；$\dot{q}_k$、$\ddot{q}_k$ 为机器人关节 k 的速度和加速度；${}^{i}u_j$ 为第 i 个机器人在关节 j 上的驱动力矩；${}^{i}D_{jk}(q)$ 为第 i 个机器人关节 j、k 的耦合惯性项系数；${}^{i}C_{jkl}(q)$ 为第 i 个机器人在关节 j 上由于关节 k、l 的速度产生的柯氏力作用项系数（$l=k$ 时，是关节 k 的速度产生的离心力作用项系数）；${}^{i}G_j(q)$ 为第 i 个机器人对关节 j 的重力作用项.

为简化动力学方程式(6-7-10)的计算，引入矩阵范数理论，对式(6-7-10)两边取范数 $\|\cdot\|_\infty$ 得

$$
\begin{aligned}
|{}^{i}u_j| \leqslant & \Big(\sum_{k=1}^{n}|{}^{i}D_{jk}(q)|\Big)\cdot\max_k|\ddot{q}_k| + \max_k\Big\{\sum_{l=1}^{n}|{}^{i}C_{jkl}(q)|\Big\} \\
& \cdot(\max_k|\dot{q}_k|)\cdot\Big(\sum_{l=1}^{n}|\dot{q}_l| + |{}^{i}G_j(q)|\Big) \\
& (j = 1,2,\cdots,n;i = 1,2,m)
\end{aligned} \tag{6-7-11}
$$

式(6-7-11)中的系数 ${}^{i}D_{jk}(q)$、${}^{i}C_{jkl}(q)$ 和 ${}^{i}G_j(q)$ 均是关节坐标 q 的时变函数，且都是 q 的正弦(余弦)函数. 为使计算再进一步简化，对它们均取函数的范数 $\|\cdot\|_\infty$ 或 $\|\cdot\|_2$，即运动段的最大值或算术平均，使其变成常系数，最后动力学方程可进一步简化为

$$
|{}^{i}u_j| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n}{}^{i}\hat{D}_{jk}\Big)\cdot\max_k|\ddot{q}_k| + \max_k\Big\{\sum_{l=1}^{n}{}^{i}\hat{C}_{jkl}\Big\}\cdot(\max_k|\dot{q}_k|)\cdot\Big(\sum_{l=1}^{n}|q_l|\Big) + {}^{i}\hat{G}_j \tag{6-7-12}
$$

$$
(j = 1,2,\cdots,n;i = 1,2,m)
$$

式中“ˆ”表示对该元素取函数的范数 $\|\cdot\|$.

由于系统内各机器人在捕捉目标之前，其起始和终止关节坐标 q_0、q_t 是已知的，若系统的运动路径也已知，则约束方程式(6-7-12)中的关节驱动力矩 ${}^{i}u_j$ 只是关节运动速度 $\dot{q}$ 和加速度 $\ddot{q}$ 的函数，即 $u=f(\dot{q},\ddot{q})$. 式(6-7-12)就是为轨迹规划的动力学约束条件.

§7.3 系统关节空间的协调运动轨迹

由式(6-7-8)可得机器人关节坐标的实际轨迹函数

$$
q = \begin{cases}
\Big[\dfrac{A_m}{\omega_1}T - \dfrac{A_m}{\omega_1^2}\sin(\omega_1 T)\Big](q_t - q_0) + q_0 & T\in[0,\lambda_1] \\
\Big(\dfrac{2A_m}{\omega_1}T - \dfrac{A_m}{\omega_1}\lambda_1\Big)(q_t - q_0) + q_0 & T\in[\lambda_1,\lambda_2] \\
\Big\{\dfrac{A_m}{\omega_2^2}\sin[\omega_2(T-\lambda_2)] + \Big(\dfrac{2A_m}{\omega_1} - \dfrac{A_m}{\omega_2}\Big)T \\
\quad + \dfrac{A_m}{\omega_2}\lambda_2 - \dfrac{A_m}{\omega_1}\lambda_1\Big\}(q_t - q_0) + q_0 & T\in[\lambda_2,1]
\end{cases} \tag{6-7-13}
$$

由式(6-7-1)，对式(6-7-13)关于时间 t 求导数，可得关节坐标的速度和加速度方程：

$$\dot{q}=\begin{cases}\dfrac{A_m}{\tau\omega_1}[1-\cos(\omega_1 T)](q_t-q_0) & T\in[0,\lambda_1]\\ \dfrac{2A_m}{\tau\omega_1}(q_t-q_0) & T\in[\lambda_1,\lambda_2]\\ \left\{\dfrac{A_m}{\tau\omega_2}\cos[\omega_2(T-\lambda_2)]+\left(\dfrac{2A_m}{\tau\omega_1}-\dfrac{A_m}{\tau\omega_2}\right)\right\}(q_t-q_0) & T\in[\lambda_2,1]\end{cases} \tag{6-7-14}$$

$$\ddot{q}=\begin{cases}\left[\dfrac{A_m}{\tau^2}\sin(\omega_1 T)\right](q_t-q_0) & T\in[0,\lambda_1]\\ 0 & T\in[\lambda_1,\lambda_2]\\ \left\{-\dfrac{A_m}{\tau^2}\sin[\omega_2(T-\lambda_2)]\right\}(q_t-q_0) & T\in[\lambda_2,1]\end{cases} \tag{6-7-15}$$

在 q_0,q_t 已知的情况下，轨迹方程(6-7-13) — (6-7-15) 只是 T 和 τ 的函数，因此只要 τ 确定，轨迹方程就完全确定. 由于所规划的关节运动规律的特性，轨迹方程式(6-7-14)的最大速度点为 $T=\lambda_1$，式(6-7-15) 的最大加速度点为 $T=\frac{1}{2}\lambda_1$. 运用约束方程式(6-7-9) 或(6-7-12) 即可求出所允许的最短运行时间 $\tau_{\min}$，将其代入式(6-7-13) — (6-7-15) 就得到最后所期望的系统实际关节空间的协调运动轨迹方程.

§7.4 算例

为演示文中所提出的轨迹规划方法，我们选取两个华宇 Ⅱ 型机械臂组成一个协调系统作为算例，仅考虑前三个关节. 华宇 Ⅱ 型机械臂前三个关节的结构简图见图 6-23 所示. 其结构物理参数为，各杆对质心的转动惯量：$I_{1x}=2.65(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$，$I_{2x}=0.4(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$，$I_{2y}=I_{2z}=4.09(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$，$I_{3x}=0.6(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$，$I_{3x}=I_{3y}=6.7(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$，质量：$m_2=63.98(\text{kg})$，$m_3=70.0(\text{kg})$，杆长：$l_1=0.81(\text{m})$，$l_2=0.6(\text{m})$，$l_3=0.8(\text{m})$，质心到转轴距离：$S_2=0.317(\text{m})$，$S_3=0.25(\text{m})$. 设系统要完成捕捉目标作业，各手臂的初始和终止关节坐标如表 6.3 所示. 运用动力学约束方程式(6-7-12)，设机械臂各关节驱动力矩的允许范围均为 $|u_j|\leqslant 500(\text{N.m})$. 计算结果，得系统的允许最短运行时间 $\tau=3.23(\text{s})$，机械臂 1 的关节运动轨

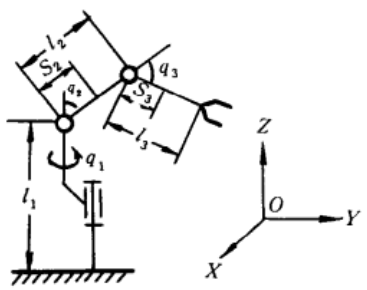


图 6-23 华宇 Ⅱ 型机械臂前三个关节结构简图

表 6-3 机械臂 1 和 2 的起始终止关节坐标

	机械臂 1			机械臂 2		
	关节 1	关节 2	关节 3	关节 1	关节 2	关节 3
q_0	0.0	0.0	0.0	1.6	0.2	0.1
q_t	0.79	0.35	0.52	0.79	0.45	0.38

迹及所需的输入驱动力矩见图 6－24— 图 6－26，机械臂 2 的关节运动轨迹及所需输入驱动力矩见图 6－27— 图 6－29.

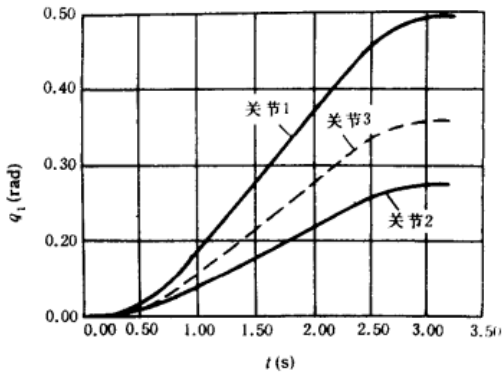


图 6－24　手臂 1 关节角位移 q_1 曲线

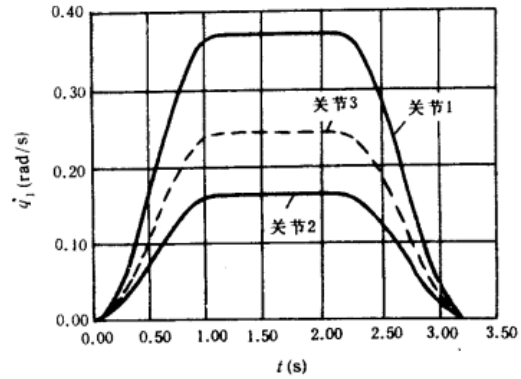


图 6－25　手臂 1 关节角速度 $\dot{q}_1$ 曲线

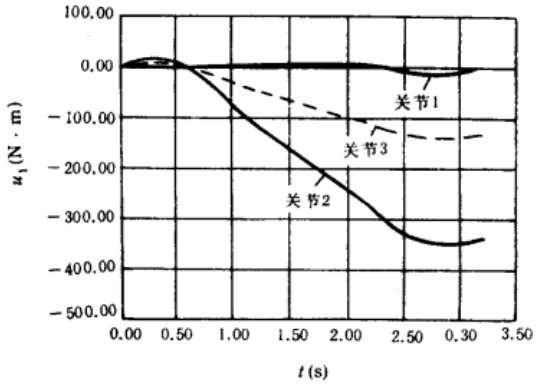


图 6－26　手臂 1 关节输入驱动力矩 u_1 曲线

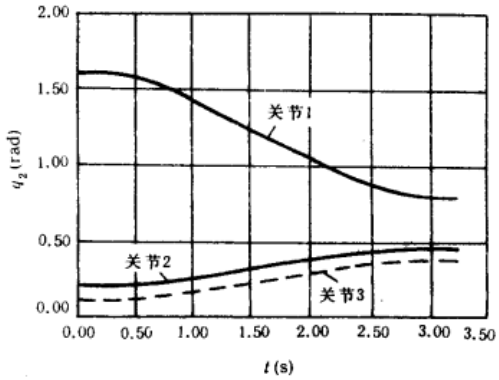


图 6－27　手臂 2 关节角位移 q_2 曲线

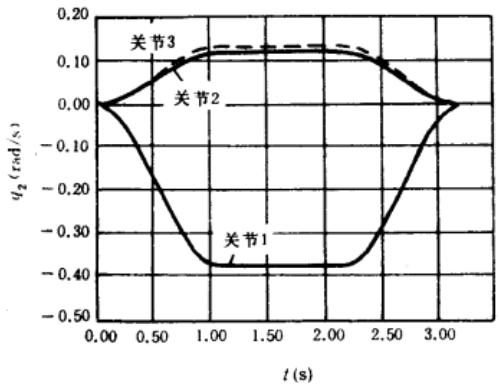


图 6－28　手臂 2 关节角速度 $\dot{q}_2$ 曲线

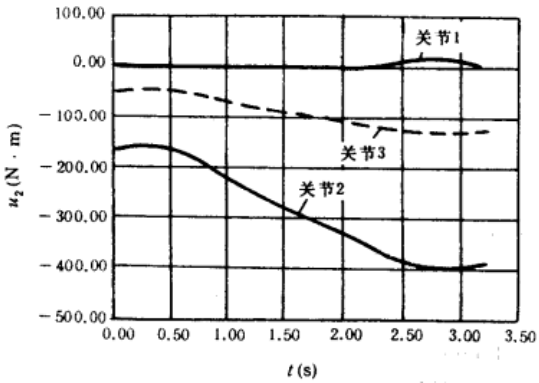


图 6－29　手臂 2 关节输入驱动力矩 u_2 曲线

第七章　飞行器对接动力学

§1. 引　　言

交会对接技术是载人航天技术的重要组成部分之一，是人们完成一系列空间作业的前提.

交会是指一个飞行器（称为追踪飞行器或主动飞行器）与另一个已在轨的飞行器（称为目标飞行器或被动飞行器）按照预定的程序和条件在空间轨道上相会合. 对接则是交会的后继作业，是在完成交会后，两个飞行器经过接触、滑动、捕获和调整，最后紧固联结成一个复合的飞行器整体的过程.

我们知道一个飞行器（特别是空间站或者空间实验室）可以长期在轨道上运行. 如前苏联的礼炮号空间站有过在轨运行数年的历史. 当然，航天员不会在空间站上停留这样长的时间. 这样就需要有一个飞船来接送航天员，并运送补给. 例如礼炮号空间站和和平号空间站是由进步号飞船和联盟号飞船承担天地往返运输任务. 美国空间实验室曾由阿波罗飞船承担运输任务. 每次往返都需有对接这一空间作业. 另外，空间站是模块式的，它也要通过对接来实现在轨扩装. 此外，飞行器的一些故障修复也需要以对接为前提.

这些例子都说明了对接技术对载人航天的重要性. 正因此，无论是前苏联还是美国都在第一次载人飞行成功后，立即抓紧对接技术的研究. 例如尤里·加加林在 61 年 4 月 12 日首次乘东方号完成空间飞行，随后在 67 年 10 月 30 日，宇宙-186 和宇宙-188 就首次实现两船自动对接. 再后，联盟 4 号与联盟 5 号又完成了首次有人对接. 到 1971 年 4 月前苏联发射的第一个空间站礼炮一号，就是由联盟 10 号和联盟 11 号飞船接送航天员和进行补给. 美国也是在第一次载人飞行后不久就由双子星座（Gemini）飞船先进行了自动对接，后完成了有人对接.

由于空间站长期留在太空，更由于人们正在研究永久性空间站，这样像在轨装配，维修更换，给养补充，燃料加注，人员往返，产品回收和应急救援等作业越来越多，空间对接作业也越来越多. 仅前苏联截止到 80 年代末就进行过 120 余次空间对接.

在对接技术发展中，动力学的研究有着很重要的作用.

首先，对接时两个飞行器必须以一定的相对速度互相接近. 相对速度过小，追踪飞行器无法迅速接近目标飞行器. 而且对接机构上的锁紧装置也在一定相对速度下才能有效锁紧. 但过大的相对速度，又可能造成过大的冲击载荷，或使飞船受损，或使对接失败. 对相对速度的选择及对可能的对接情况的估计，需要进行对接动力学仿真分析.

其次，对接机构的两个关键部件是缓冲阻尼器和锁紧装置（捕获锁和结构锁）. 这两个都需进行动力学设计，还需要进行半实物仿真验证. 这也是对接动力学的任务.

对接动力学的模型与对接机构的型式有关.

对接机构按结构型式分，主要有两大类，一类是杆-锥式（Probe-Drogue）对接机构，

见图 7－1．一类是异体同构周边连接式（Peripherical Androgeneous）．对接机构，见图 7－2．早期采用的都是杆-锥式对接机构，它的结构简单，可以允许较大的初始容差．现在则采用周边式对接机构，它被公认为是最有前途的一类对接机构．

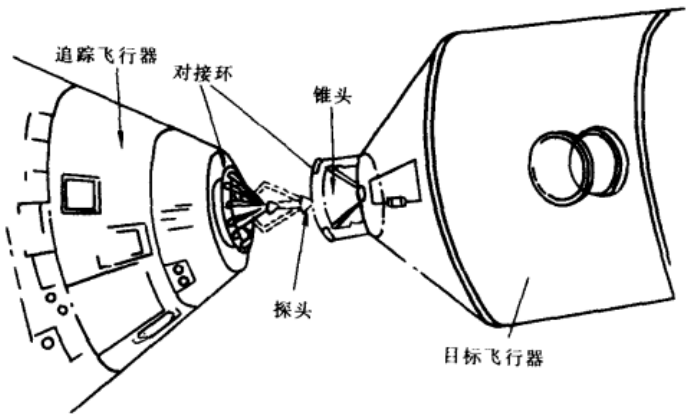


图 7－1　“阿波罗”飞船的“杆-锥”式对接机构

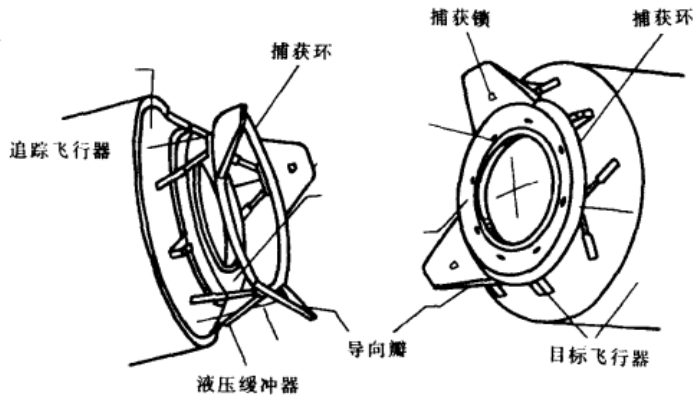


图 7－2　异体同构周边连接式对接机构

所谓异体同构是指无论是追踪飞行器还是目标飞行器，其对接机构都是同样构造的．杆-锥式对接机构则不同．追踪飞行器上装杆式对接机构，目标飞行器上装锥式对接机构．显然，异体同构的对接机构更具灵活性．周边连接是指对接时主要靠对接环上的结构锁将两飞行器紧固为一体，环中间是中空的，有一个可供航天员通行的通道．异体同构周边连接对接机构主要由导向叶片、捕获环、对接环以及缓冲阻尼器组成．导向叶片和捕获环是一个整体，通过缓冲器连在飞行器上．对接环直接装在飞行器上．导向叶片和捕获环上装有捕获锁，对接环上装有结构锁．此外，对接装置上还有电缆和管路的接口以接通两个飞行器上的电缆和各种管路．

对接的过程大体上可分为三个阶段．

第一个阶段是接近与接触阶段．在这一阶段，目标飞行器保持在轨道上的稳定飞行，

它的对接机构处于收紧状态．追踪飞行器的对接机构则适当伸展开，以便可能起缓冲和阻尼的作用．追踪飞行器主动向目标飞行器靠近．倘若两个飞行器只在飞行方向有相对速度，此外在其他方向（包括转角）都没有偏差，这时两个对接机构的导向叶片交互啮合（参看图7－3），对接环上的捕获锁与对方导向叶片上的捕获锁正好相互对准而完成捕获．但实际上，在交会结束时，两飞行器之间偏差总是不可避免的．这种偏差倘若是在允许范围之内，就构成对接时的初始条件．在一定初始条件下，两个飞行器先是相互接近，继而是导向叶片之间、或捕获环之间、或导向叶片与捕获环之间的某些点相互接触．相互接触后就形成了动态约束条件．在不同初始条件下，哪些点可能相互接触，形成什么样的动态约束条件，这是对接第一阶段要研究的问题．

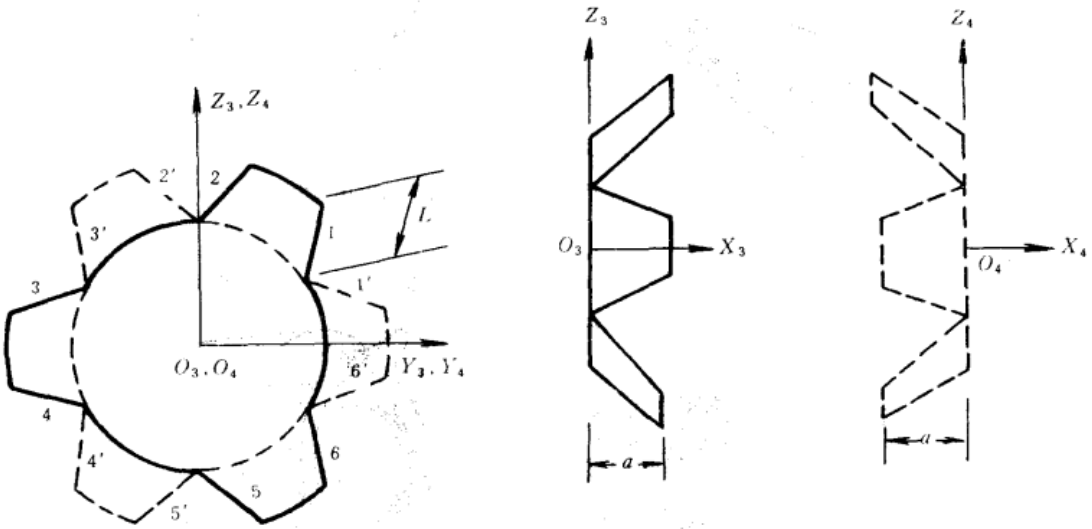


图7－3　两个对接机构的导向叶片相互啮合的示意图

实线——主动对接机构　虚线——被动对接机构

1，2，…，6　主动对接机构上导向叶片编号　1'，2'，…，6'　被动对接机构上导向叶片编号

第二个阶段是滑动与捕获阶段．两个飞行器上的对接机构的任意一组点接触后，由于导向叶片和捕获环的结构特点，再加上缓冲阻尼器的微调作用，就使得接触点向减小偏差，有利实现捕获的方向滑动．因此，这种约束条件才被称为是动态约束条件．与此同时，追踪飞行器上的主动对接装置的缓冲阻尼器开始起阻尼（消耗两个飞行器相互接近的动能）和调节的作用．滑动的结果，当两个飞行器的捕获环间相对偏差达到允许值，环上的捕获锁即与导向叶片上的捕获锁在误差允许意义上相互对紧．这时沿飞行方向的相对速度（必要时还可加上一些助推力）使捕获锁锁紧．显然如果初始条件与缓冲阻尼器性能及捕获锁的性能匹配不当，对接可能失败．因此，第二阶段的动力学过程是对接动力学研究与仿真的重点，也是本章讨论的重点．

对接的第三个阶段是调整与紧固阶段．这时，追踪飞行器上的主动对接机构的缓冲器适当调整，使两个飞行器的对接环全面对准，继而结构锁使两飞行器全面紧固．对接至此完成．这一阶段也是一个动力学过程，也是对接动力学要研究和仿真的问题．

§2. 对接的动态约束条件[100]

对接的动态约束条件是通过研究对接的第一阶段（即接近与接触阶段）两个飞行器上的对接机构可能有哪些相互接触点而求得的.

首先我们要研究对接机构上的点如何描述. 为了进行描述，先要定义以下几组坐标系，参看图 7－4.

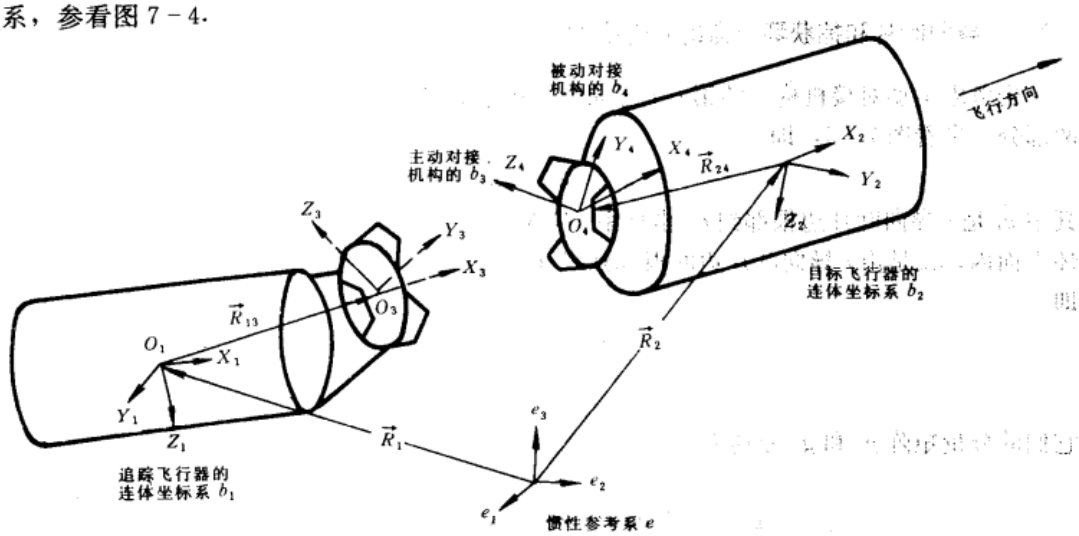


图 7－4 坐标系统

1. 惯性坐标系，$\underset{\sim}{e}^T=(e_1, e_2, e_3)$，原点设在分析者认为可以代表惯性空间的固定点上.

2. 追踪（主动）飞行器的连体坐标系 $\underset{\sim}{b}_1^T=(b_{11}, b_{12}, b_{13})$，原点在追踪飞行器的质心上，也可按传统的直角坐标表示法给出为 $O_1X_1Y_1Z_1$. 这样 b_{11} 是沿 O_1X_1 的单位向量，b_{12} 是沿 O_1Y_1 的单位向量，b_{13} 是沿 O_1Z_1 的单位向量. 按照飞行力学中关于飞行器的连体坐标系的方向的约定，X_1 沿飞行器的飞行方向，Z_1 指向地心，Y_1 由 X_1 及 Z_1 依右手定则确定.

3. 目标（被动）飞行器的连体坐标系，$\underset{\sim}{b}_2^T=(b_{21}, b_{22}, b_{23})$，原点在目标飞行器的质心，也可记作 $O_2X_2Y_2Z_2$. 基向量的指向规定与追踪飞行器情况相同.

4. 主动对接机构（捕获环）的连体坐标系，$\underset{\sim}{b}_3^T=(b_{31}, b_{32}, b_{33})$，原点在主动捕获环的圆心. 或记作 $O_3X_3Y_3Z_3$. 我们约定 X_3 垂直于主动捕获环平面，与导向叶片方向一致. 倘若注意（参看图 7－5）在对接时主动对接机构的导向叶片和飞行方向一致（但不全重合），则又可说 X_3 的正向与飞行方向基本一致，但不一定重合. Y_3 和 Z_3 则在捕获环平面内. 我们还约定对导向叶片的各直线边的编号是按绕 X_3 轴正向的反时针方向进行的，并规定共有三组叶片，这样可再约定 Z_3 轴通过第 2 导向叶片的根部，参看图 7－4 和图 7－5，Y_3 轴则可由 X_3 和 Z_3 轴依右手定则定出.

5. 被动对接机构（捕获环）的连体坐标系，$\underset{\sim}{b}_4^T=(b_{41}, b_{42}, b_{43})$，原点在被动捕获环

的圆心，也可记作$O_4X_4Y_4Z_4$. 我们仍约定X_4与飞行方向基本一致. 由图7-4可见被动捕获环的导向叶片与飞行方向相反. 就是说，X_4与其导向叶片方向相反. 这一点在后面描述导向叶片上点时请注意. 导向叶片的直线边的编号仍依绕X_4正向的反时针方向进行. Z_4仍过第2导向叶片的根部. Y_4则可由X_4和Z_4依右手定则定出.

有了这些坐标系就可以描述导向叶片上和捕获环上的点，并给出对接的动态约束条件.

§2.1 导向叶片和捕获环上点的几何描述

先考虑主动对接机构上的第i个导向叶片边上的点G_i的位置向量$\vec{g}_i$. 它显然可分为两部分，参看图7-5，即

$$\vec{g}_i = \vec{g}_{io} + \vec{g}_{iu} \tag{7-2-1}$$

其中$\vec{g}_{io}$是i导向叶片边根部到$\underset{\sim}{b}_3$坐标系（$O_3X_3Y_3Z_3$坐标系）的原点O_3的距离，在捕获环平面内；$\vec{g}_{iu}$是由i导向叶片边的根部到G_i点的距离. 它们都在$\underset{\sim}{b}_3$坐标参考系内定义，即

$$\vec{g}_{io} = \underset{\sim}{b}_3^T \underset{\sim}{g}_{io} \tag{7-2-2}$$

$$\vec{g}_{iu} = \underset{\sim}{b}_3^T \underset{\sim}{g}_{iu} \tag{7-2-3}$$

它们的分量矩阵$\underset{\sim}{g}_{io}$和$\underset{\sim}{g}_{iu}$分别为

$$\underset{\sim}{g}_{io} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_k\cos\theta_i \\ R_k\sin\theta_i \end{bmatrix} \text{和} \underset{\sim}{g}_{iu} = \begin{bmatrix} au \\ Lu\cos\alpha_i \\ Lu\sin\alpha_i \end{bmatrix} \tag{7-2-4}$$

其中，R_k是对接环的半径，L是导向叶片的边长在$O_3Y_3Z_3$平面（捕获环平面）内的投影. a是导向叶片的边长在X_3轴方向的投影. u是由0到1变化的参数，用以表示G_i在直边上的位置. θ_i是第i导向叶片边根部点的圆心角，自Y_3轴量起，

$$\theta_i = \frac{\pi}{6}(2i - 1) \tag{7-2-5}$$

i导向叶片边与Y_3轴间夹角为α_i，显然

$$\alpha_i = \theta_i - (-1)^i\beta \tag{7-2-6}$$

β是i导向叶片边在环平面内投影与$\vec{g}_{io}$间夹角.

被动对接机构上的第i个导向叶片边上的点Q_i的位置向量$\vec{q}_i$也分为两部分，参看图7-5，即

$$\vec{q}_i = \vec{q}_{io} + \vec{q}_{iv} \tag{7-2-7}$$

且有

$$\vec{q}_i = \underset{\sim}{b}_4^T \underset{\sim}{q}_{io} + \underset{\sim}{b}_4^T \underset{\sim}{q}_{iv} \tag{7-2-8}$$

注意X_4的指向与导向叶片反向，因而有

$$\underset{\sim}{q}_{io} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_k\cos\theta_i \\ R_k\sin\theta_i \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \underset{\sim}{q}_{iv} = \begin{bmatrix} -av \\ Lv\cos\alpha_i' \\ Lv\sin\alpha_i' \end{bmatrix} \tag{7-2-9}$$

式中R_k，θ_i，L，a，v和β含义和主动对接机构情况一样，v也是由0到1变化的参数，只是α_i'稍有不同. 这里

$$\alpha_i' = \theta_i + (-1)^i\beta \qquad (7-2-10)$$

再考虑主动捕获环上点 G_7 和被动捕获环上点 Q_7 的位置向量 $\vec{g}_7$ 和 $\vec{q}_7$. 这两个向量当然在捕获环平面内：

$$\vec{g}_7 = \underset{\sim}{b}_3^T \underset{\sim}{g}_7 \qquad \vec{q}_7 = \underset{\sim}{b}_4^T \underset{\sim}{q}_7 \qquad (7-2-11)$$

而

$$\underset{\sim}{g}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ R_k\cos u \\ R_k\sin u \end{bmatrix} \quad 和 \quad \underset{\sim}{q}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ R_k\cos v \\ R_k\sin v \end{bmatrix} \qquad (7-2-12)$$

u 和 v 分别是自 Y_3 轴和 Y_4 轴量起的圆心角，自 0 变化到 2π，见图 7－5.

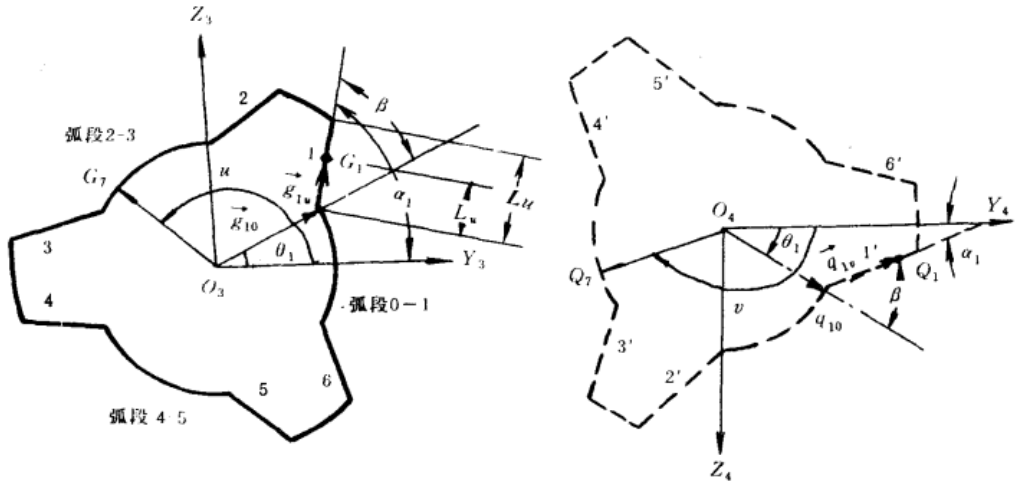


图 7－5　对接机构上点的几何描述

§2.2　动态约束条件

现在我们进一步讨论可能的接触情况和动态约束条件.

两组对接机构的可能接触情况有四组，现分述如下：

1. 两组导向叶片上的点 G_i 和 Q_j 相互接近并进而接触的情况. 把图 7－4 及图 7－5 两图综合起来，可以得出主动对接机构的导向叶片上点 G_i 和被动对接机构上导向叶片上点 Q_j 间在相互接近时的向量关系. 它们可以示意地给在图 7－6 中. 这个关系是

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_{13} + \vec{g}_{io} + \vec{g}_{iu} + \vec{P}(w) - \vec{q}_{jo} - \vec{q}_{jv} - \vec{R}_{24} - \vec{R}_2 = 0 \qquad (7-2-13)$$

式中 $\vec{P}(w)$ 是 G_i 点和 Q_j 点间距离，因两飞行器运动而随着参数 w 变化. $\vec{P}(w)=0$ 表示该两点已互相接触.

从图 7－3 还可看出，只是具有相同编号的两组导向叶片（例如 $i=1$ 和 $j=1'$ 或 $i=4$ 和 $j=4'$）上的点，才有可能相互接近并进而相互接触. 因此，这一类可能接触情况共有 6 个.

2. 主动对接机构上的导向叶片边上的点 G_i 与被动对接机构的捕获环上的 Q_7 相接近并进而接触. 它们的向量关系为

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_{13} + \vec{g}_{io} + \vec{g}_{iu} + \vec{P}(w) - \vec{q}_7 - \vec{R}_{24} - \vec{R}_2 = 0 \qquad (7-2-14)$$

其中 $\vec{P}(w)$ 是 G_i 和 Q_7 两点间距离．由图 7－3 也可看出，当 i 是奇数时，主动对接机构的第 i 个导向叶片边上的点 G_i 可能和被动对接机构上的捕获环的 $i-(i+1)$ 弧段上的点 Q_7 相接触．而当 i 是偶数时，主动对接机构上第 i 导向叶片边上点 G_j 可能与被动对接机构的捕获环 $(i-1)-i$ 弧段上的点 Q_7 相接触．因此，可能的相互接触情况也有六个．

3．主动对接机构的捕获环上点 G_7 与被动对接机构的第 j 个导向叶片边上点 Q_j 相接近并进而相接触．它们的向量关系是

$$\vec{R}_1+\vec{R}_{13}+\vec{g}_7+\vec{P}(w)-\vec{q}_{jv}-\vec{R}_{24}-\vec{R}_2=0 \qquad (7-2-15)$$

这里的 $\vec{P}(w)$ 是 G_7 与 Q_j 间距离．由图 7－3 可知，当被动对接机构的导向叶片边编号 j 为奇数时，Q_j 可与主动对接机构捕获环的 $j-(j+1)$ 弧段相接触；当 j 为偶数时，Q_j 可与主动对接机构捕获环的 $(j-1)-j$ 弧段相接触．这里的可能相互接触情况也有六个．

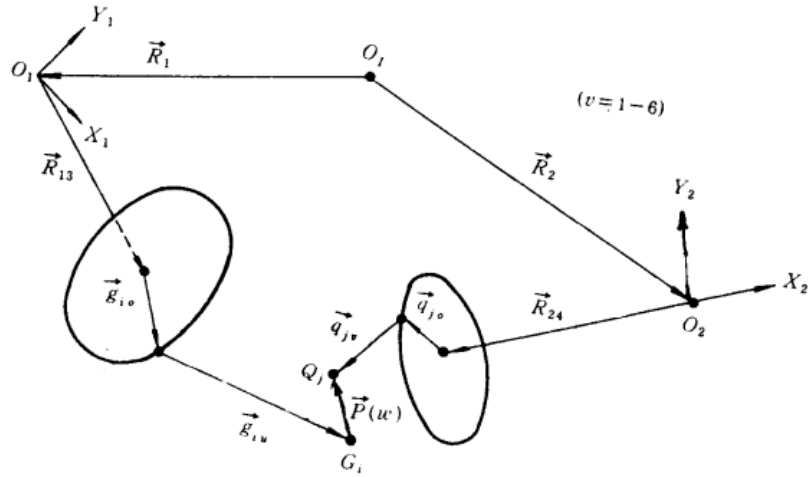


图 7－6　对接接近时各向量间关系示意图

4．两个对接机构的捕获环上点 G_7 与 Q_7 相互接触，即

$$\vec{R}_1+\vec{R}_{13}+\vec{g}_7+\vec{P}(w)-\vec{q}_7-\vec{R}_{24}-\vec{R}_2=0 \qquad (7-2-16)$$

显然，只有相同编号的弧段上的点有可能互相接触．

有了上述（7－2－13）到（7－2－16）诸方程，我们就可以根据初始条件确定首次接触点和动态约束条件．

对接的初始条件事实上就是交会结束时的条件．这些初始条件包括在对接开始时的：

两个飞行器的相对距离　$\vec{R}_{12}^0=\vec{R}_2^0-\vec{R}_1^0$　(7－2－17)

两个飞行器相对移近速度　$\vec{V}_{12}=\vec{V}_1-\vec{V}_2$　(7－2－18)

两个飞行器的相对角速度　$\vec{\omega}_{12}=\vec{\omega}_1-\vec{\omega}_2$　(7－2－19)

两个飞行器的相对姿态角　$\underset{\sim}{\varphi}_{12}=\underset{\sim}{\varphi}_1^0-\underset{\sim}{\varphi}_2^0$　(7－2－20)

这里下标 1 表示是属于追踪飞行器的量，下标 2 表示属于目标飞行器的量．又（7－2－13）和（7－2－16）诸式中的 $\vec{R}_1-\vec{R}_2$ 又可写作 $\vec{R}_{12}$，它表示在两飞行器接近运动时（$\vec{V}_1$

$>\vec{V}_2$）在 t 时刻的两飞行器的连体参考系原点间距离．显然

$$\vec{R}_{12}=\vec{R}_{12}^{0}-\vec{V}_{12}t \tag{7-2-21}$$

这样，$\vec{R}_{12}=\vec{R}_1-\vec{R}_2$ 将不断减小．对于特定的点，例如（7－2－13）中的 G_i 与 Q_j，$\vec{g}_{io}$ 和 $\vec{g}_{iu}$ 和 $\vec{q}_{jo}$ 和 $\vec{q}_{jv}$，应是一个固定的值，$\vec{R}_{12}$ 减小就意味着 $\vec{P}(w)$ 在减小．这反应了两组对接机构的对应点在互相接近．随着时间 t 增加，（7－2－13）到（7－2－16）诸式中可能有某一式或几式首先出现 $\vec{P}(w)=0$．这就意味这个方程内的对应点 G 和 Q 就是首次接触点，而 $\vec{P}(w)=0$ 的这组方程就是我们寻求的动态约束条件．

以上过程不难通过运动学仿真程序解出．运动学仿真程序框图如下：

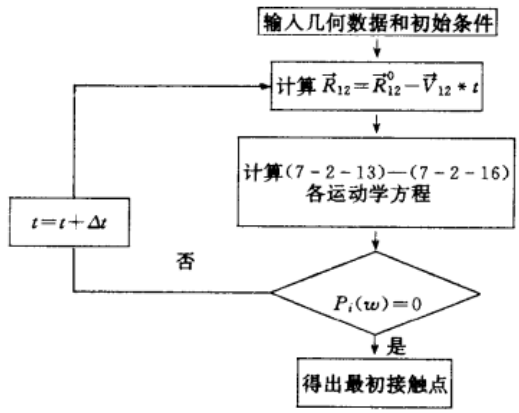


表 7－1 是一组用以验证仿真程序正确性的例子．

表 7－1

例题序号	初始条件	接触情况			
		主动对接机构	u_0	被动对接机构	v_0
1	$\varphi=(0,0,0)$ $\omega=(0,0,0)$	对接环	全面接触	对接环	全面接触
2	$\varphi=(-0.2\text{rad},0,0)$ $\omega=(0,0,0)$	导向叶片边 1 3 5	0.7 0.7 0.7	导向叶片边 1 3 5	0.7 0.7 0.7
3	$\varphi=(0.2\text{rad},0,0)$ $\omega=(0,0,0)$	导向叶片边 2 4 6	0.7 0.7 0.7	导向叶片边 2 4 6	0.7 0.7 0.7
4	$\varphi=(0,0,0)$ $\omega=(0.02\text{rad}/s,0,0)$	导向叶片边 2 4 6	0.7 0.7 0.7	导向叶片边 2 4 6	0.7 0.7 0.7

对接环半径 $R_k=0.5\text{m}$，$L=0.2\text{m}$，$a=0.15\text{m}$，$\beta=0.5\text{rad}$

§2.3 接触力的方向

有了初始接触点，同时也就可以确定接触力的方向。接触力的方向因接触点的类型不同而不同。

1. 两组导向叶片上点 G_i 和 Q_j 相互接触时，注意 G_i 在向量 $\vec{g}_i$ 上而 Q_j 在向量 $\vec{q}_j$ 上。这时的接触力方向应同时垂直于 $\vec{g}_i$ 和 $\vec{q}_j$，即接触力的方向是在

$$\vec{N} = \vec{g}_i \times \vec{q}_j$$

而这个方向的单位向量是

$$\vec{n} = \frac{\vec{g}_i}{(\vec{g}_i \cdot \vec{g}_i)^{1/2}} \times \frac{\vec{q}_j}{(\vec{q}_j \cdot \vec{q}_j)^{1/2}} \tag{7-2-22}$$

我们规定作用在主动对接机构上的力与这个方向一致，即

$$\vec{F}_3 = \vec{F} = F\vec{n} \tag{7-2-23}$$

当然，作用在被动对接机构上的力则是

$$\vec{F}_4 = -\vec{F} = -F\vec{n} \tag{7-2-24}$$

2. 主动对接机构上的导向叶片上的点 G_i 与被动对接机构的捕获环上的点 Q_7 相接触时，接触力所沿的单位向量为

$$\vec{n} = \frac{1}{(\vec{g}_j \cdot \vec{g}_i)^{1/2}} \frac{1}{(\vec{q}_7 \cdot \vec{q}_7)^{1/2}} \vec{g}_i \times \vec{q}_7 \tag{7-2-25}$$

3. 主动对接机构的捕获环上的点 G_7 与被动对接机构的导向叶片上的点 Q_j 相接触时，接触力所沿的单位向量为

$$\vec{n} = \frac{1}{(\vec{g}_7 \cdot \vec{g}_7)^{1/2}} \frac{1}{(\vec{q}_i \cdot \vec{q}_i)^{1/2}} \vec{g}_7 \times \vec{q}_j \tag{7-2-26}$$

4. 两个对接机构的捕获环上的点 G_7 与 Q_7 相接触时，接触力所沿的单位向量为

$$\vec{n} = \frac{1}{(\vec{g}_7 \cdot \vec{g}_7)^{1/2}} \frac{1}{(\vec{q}_7 \cdot \vec{q}_7)^{1/2}} \vec{g}_7 \times \vec{q}_7 \tag{7-2-27}$$

§3. 滑动和捕获阶段的对接动力学方程[100,131]

在两个飞行器相互接触后，就开始了对接的第二个阶段，也就是滑动与捕获阶段．这一阶段有两个大特点．

第一是自接触时刻起，缓冲阻尼器即开始起作用．就是说由运动学过程转入了动力学过程．因此需列出动力学方程．

第二是接触点不是固定的．在这一阶段两飞行器的对接机构上的某些部分通过相互滑动使接触点不断移动，由初次接触点 u_0 和 v_0（参见上节例题）变到零．因此需要有动态约束条件．

动态约束条件可由上一节得出，它的一般形式有以下几类，即

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_{13} + \vec{q}_{io} + \vec{g}_{iu} - \vec{q}_{jo} - \vec{q}_{jv} - \vec{R}_{24} - \vec{R}_2 = 0 \tag{7-3-1}$$

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_{13} + \vec{g}_{io} + \vec{g}_{iu} - \vec{q}_7 - \vec{R}_{24} - \vec{R}_2 = 0 \tag{7-3-2}$$

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_{13} + \vec{g}_7 - \vec{q}_{jo} - \vec{q}_{jv} - \vec{R}_{24} - \vec{R}_2 = 0 \tag{7-3-3}$$

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_{13} + \vec{g}_7 - \vec{q}_7 - \vec{R}_{24} - \vec{R}_2 = 0 \tag{7-3-4}$$

具体是哪一个方程，由上一节的运动学仿真结果确定．这些约束条件称为动态约束条件是因为式中含有的参数 u 和 v 在第二阶段是变化的．

本节讨论对接动力学方程.

在这里讨论的是一个由三个体组成的多体系统. 第一个体是目标飞行器连同其上的被动对接机构. 由于在对接过程中,被动对接机构与目标飞行器固紧在一起,所以看作是一个体. 第二个体是主动对接机构. 第三个体是追踪飞行器. 这三个体是顺序连接的. 追踪飞行器与主动对接机构之间由一组缓冲阻尼器连结. 一般讲共有六个缓冲阻尼器,它们可以看作是具有六个自由度的既有弹性又有阻尼的可移动关节. 目标飞行器是通过它的被动对接机构与主动对接机构以动态约束条件在一起的.

在建立动力学方程时,我们做以下几个约定:

1. 目标飞行器可以是一个柔性飞行器. 这就是说我们面对的可以是像拟议中的自由号空间站那样的大型柔性结构,也可以是像和平号空间站那样的带有大型柔性附件的飞行器. 当然它也可以是一个刚体.

2. 在对接时目标飞行器的弹性附件(倘若有的话)与飞行器的关节被锁死. 弹性附件与目标飞行器构成一个柔性飞行器整体.

3. 追踪飞行器是一个刚体.

4. 对接机构也被认为是刚性体.

5. 不考虑缓冲阻尼器的惯性,认为它们是只提供弹性力和阻尼力的可移动关节.

6. 目标飞行器的弹性变形(如果有的话)是小位移,因而弹性位移可以用模态展开为

$$\vec{u} = \vec{T}\,\eta \tag{7-3-5}$$

其中 $\vec{T}$ 是模态向量阵,η 是模态坐标列阵,$\vec{u}$ 是目标飞行器的弹性位移.

为了推导方便,我们把目标飞行器和带有主动对接装置的追踪飞行器分开考虑,并将接触点的约束反力 F 作为外力分别加到目标飞行器上和主动对接装置上. 建立动力学方程的方法,可以用第三章中的任何一种方法. 这里我们用虚功率原理(又称 Jourdain-Bertrand 原理).[100]它的基本方程是系统的总的虚功率 δP 为零,即

$$\delta P = \delta P_I + \delta P_T + \delta P_e = 0 \tag{7-3-6}$$

其中 δP_I 是惯性力的虚功率,δP_T 是弹性力的虚功率,δP_e 是外力的虚功率. 每一项虚功率又分别包括主动对接机构的,追踪飞行器的和目标飞行器的三个部分.

现在我们分别考虑带有主动对接装置的追踪飞行器和目标飞行器的惯性力虚功率.

在带有主动对接装置的跟踪飞行器上有动态约束反力 F(作用在相互接触点上),还可能有推力 T 和控制力矩 M_{cT}. 在被动飞行器上则只有动态约束力 F.

§3.1 追踪飞行器的惯性力虚功率

首先考虑追踪飞行器的惯性力虚功率 δP_{IC}.

$$\delta P_{IC} = -\int_c \vec{a}_c \cdot \delta\vec{v}_c dm \tag{7-3-7}$$

其中,$\vec{a}_c$ 是追踪飞行器上微元质量 dm 的加速度向量;$\delta\vec{v}_c$ 则是该微元质量的虚速度. 式中 $\int_c (\cdots)dm$ 表示积分遍及追踪飞行器.

追踪飞行器(坐标系为 $O_1X_1Y_1Z_1$ 或基向量矩阵为 b_1)上的微元质量 dm 的位置向量 $\vec{R}_c$ 为

$$\vec{R}_c = \vec{R}_1 + \vec{\rho}_1 \tag{7-3-8}$$

其中 $\vec{R}_1$ 是由追踪飞行器质心 O_1 到惯性坐标系原点的位置向量，$\vec{\rho}_1$ 是 dm 到 O_1 的位置向量．注意追踪飞行器有相对于惯性坐标系的绝对角速度 ω_1．这些量分别在不同坐标系内定义：

$$\vec{R}_1 = \underset{\sim}{e}^T \underset{\sim}{R}_1 \tag{7-3-9}$$

$$\vec{\rho}_1 = \underset{\sim}{b}_1^T \underset{\sim}{\rho}_1 \tag{7-3-10}$$

$$\vec{\omega}_1 = \underset{\sim}{b}_1^T \underset{\sim}{\omega}_1 \tag{7-3-11}$$

由附录 B 中关于动坐标系内向量求时间导数的规则，可得出微元质量 dm 的速度向量 $\vec{v}_c$ 和加速度向量 $\vec{a}_c$ 分别为

$$\vec{v}_c = \frac{D\vec{R}_c}{Dt} = \dot{\vec{R}}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1 \tag{7-3-12}$$

和

$$\vec{a}_c = \frac{D\vec{v}_c}{Dt} = \ddot{\vec{R}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{\rho}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1) \tag{7-3-13}$$

dm 微元质量的虚速度则可由(7-3-13)式中以 $\delta \dot{\vec{R}}_1$ 和 $\delta \vec{\omega}_1$ 代替(7-3-13)中的 $\ddot{\vec{R}}_1$ 和 $\dot{\vec{\omega}}_1$ 并略去非线性项而得

$$\delta \vec{v}_c = \delta \dot{\vec{R}}_1 + \delta \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1 \tag{7-3-14}$$

将(7-3-13)和(7-3-14)代入(7-3-7)中，可得

$$\delta P_{Ic} = -\int_c [\ddot{\vec{R}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{\rho}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1)] \cdot [\delta \vec{R}_1 + \delta \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1] dm$$

上式中，与 $\delta \dot{\vec{R}}_1$ 乘的项比较简单．注意 $\delta \dot{\vec{R}}_1$，$\vec{R}_1$，$\dot{\vec{\omega}}_1$ 和 $\vec{\omega}_1$ 都与积分变量无关，可以很容易求得

$$\int_c \delta \vec{R}_1 \cdot [\ddot{\vec{R}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{\rho}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1)] dm$$

$$= \delta \vec{R}_1 \cdot [\ddot{\vec{R}}_1 m_1 + \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{S}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{S}_1)]$$

在进行第一个方括号内项[……]与$(\delta \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1)$有关的积分时，则需应用关于向量三重积的著名公式

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

这样，可以分项进行计算，得出第一项为

$$\int_c \ddot{\vec{R}}_1 \cdot (\delta \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1) dm = \delta \vec{\omega}_1 \cdot \left(\int_c \vec{\rho}_1 dm \times \ddot{\vec{R}}_1 \right) = \delta \vec{\omega}_1 \cdot (\vec{S}_1 \times \ddot{\vec{R}}_1)$$

和

$$\int_c (\dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{\rho}_1) \cdot (\delta \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1) dm = \delta \dot{\vec{\omega}}_1 \cdot \int_c \vec{\rho}_1 \times (\dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{\rho}_1) dm$$

再注意附录 A § 8 中的(A-63)和(A-67)两式，第二项积分可写为

$$\int_c (\dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{\rho}_1) \cdot (\delta \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{\rho}_1) dm = \delta \dot{\vec{\omega}}_1 \cdot \vec{J} \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

至于第三项，则为

$$\int_c [\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1)] \cdot (\delta \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1) dm = \delta \vec{\omega}_1 \cdot \int_c [\vec{\rho}_1 \times (\dot{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1))] dm$$

对于其中的积分还需应用著名公式

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

于是第三项积分中的右端的方括号内项变成：

$$\vec{\rho}_1\times\{\vec{\omega}_1\times(\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_1)\}=\vec{\omega}_1((\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_1)\cdot\vec{\rho}_1)-(\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_1)(\vec{\rho}_1\cdot\vec{\omega}_1)$$

注意附录 A 中(A－62)式，即 $\vec{\omega}_1=\vec{\boldsymbol{I}}\cdot\vec{\omega}_1$，上式变成：

$$\begin{aligned}\vec{\rho}_1\times\{\vec{\omega}_1\times(\vec{\omega}_1\times\rho_1)\}&=(\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_1\cdot\vec{\rho}_1)\vec{\boldsymbol{I}}\cdot\vec{\omega}_1-(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_1)\vec{\rho}_1\cdot\vec{\omega}_1\\&=\vec{\omega}_1\times\{(\vec{\rho}_1\cdot\vec{\rho}_1)\vec{\boldsymbol{I}}-\vec{\rho}_1\vec{\rho}_1\}\cdot\vec{\omega}_1\end{aligned}$$

再注意附录 A 中的(A－66)式，最后得第三项为

$$\int_c[\vec{\omega}_1\times(\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_1)]\cdot(\delta\vec{\omega}_1\times\vec{\rho}_1)dm=\delta\vec{\omega}_1\cdot[\vec{\omega}_1\times\vec{\boldsymbol{J}}_1\cdot\vec{\omega}_1]$$

整理后，最后可得

$$\begin{aligned}\delta P_{IC}=&-\delta\vec{R}_1[m_1\ddot{\vec{R}}_1+\dot{\vec{\omega}}_1\times\vec{S}_1+\vec{\omega}_1\times(\vec{\omega}_1\times\vec{S}_1)]\\&-\delta\vec{\omega}_1\cdot[\vec{S}_1\times\ddot{\vec{R}}_1+\vec{\boldsymbol{J}}_1\cdot\dot{\vec{\omega}}_1+\vec{\omega}_1\times\vec{\boldsymbol{J}}_1\cdot\vec{\omega}_1]\end{aligned}\qquad(7-3-15)$$

其中 m_1 是追踪飞行器的质量；$\vec{\boldsymbol{J}}_1$ 是追踪飞行器的惯性并矢：

$$\vec{\boldsymbol{J}}_1=\int_c[(\vec{\rho}_1\cdot\vec{\rho}_1)\vec{\boldsymbol{I}}-\vec{\rho}_1\vec{\rho}_1]dm=\underline{b}_1^T\underline{J}_1\underline{b}_1\qquad(7-3-16a)$$

而

$$\underline{J}_1=\int_c[(\underline{\rho}_1^T\underline{\rho}_1)\underline{I}-\underline{\rho}_1\underline{\rho}_1^T]dm=\int_c\underline{\tilde{\rho}}_1^T\underline{\tilde{\rho}}_1dm\qquad(7-3-16b)$$

$\vec{S}_1$ 是追踪飞行器本身的静矩：

$$\vec{S}_1=\int_c\vec{\rho}_1dm\qquad(7-3-17)$$

当 O_1 为追踪飞行器质心时，$\vec{S}_1=0$.

§3.2 主动对接机构的惯性力虚功率

再考虑主动对接机构的惯性力虚功率．这里只考虑其捕获环和导向叶片的虚功率 δP_{Id}：

$$\delta P_{Id}=-\int_d\vec{a}_d\cdot\delta\vec{v}_ddm\qquad(7-3-18)$$

其中 $\vec{a}_d$ 是主动对接机构的捕获环及导向叶片的微元质量 dm 的加速度向量，$\vec{v}_d$ 是其速度向量．$\int_d(\cdots)dm$ 则表示积分遍及捕获环及导向叶片全部．注意捕获环连同导向叶片相对于惯性坐标系 e 的绝对角速度为 $\vec{\omega}_3$．微元质量 dm 的位置向量记作 $\vec{R}_d$.

$$\vec{R}_d=\vec{R}_1+\vec{R}_{13}+\vec{\rho}_3\qquad(7-3-19)$$

其中 $\vec{R}_1$ 是 O_1 到惯性坐标系原点的距离向量，$\vec{R}_1=\underline{b}_1^T\underline{R}_1$．$\vec{R}_{13}$ 是捕获环中心(连体坐标系 $\underline{b}_3$ 原点 O_3) 到 O_1 的距离，$\vec{\rho}_3$ 是微元质量 dm 到连体基 $\underline{b}_3$ 原点 O_3 的距离，连体基 $\underline{b}_3$ 相对惯性参考系 e 有绝对角速度 $\vec{\omega}_3$．显然，

$$\vec{R}_{13}=\underline{b}_1^T\underline{R}_{13}\qquad(7-3-20)$$

$$\vec{\rho}_3 = \underset{\sim}{b}_3^T \underset{\sim}{\rho}_3 \tag{7-3-21}$$

$$\vec{\omega}_3 = \underset{\sim}{b}_3^T \underset{\sim}{\omega}_3 \tag{7-3-22}$$

这样，有微元质量 dm 的速度向量 $\vec{v}_d$

$$\vec{v}_d = \frac{D\vec{R}_d}{Dt} = \dot{\vec{R}}_1 + \dot{\vec{R}}_{13} + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{13} + \vec{\omega}_3 \times \vec{\rho}_3 \tag{7-3-23}$$

式中的 $\dot{\vec{R}}_{13} = b_1^T \dot{\underset{\sim}{R}}_{13}$ 是由于缓冲阻尼器变形引起的速度．微元质量 dm 的加速度向量 $\vec{a}_d$ 则为

$$\vec{a}_d = \frac{D\vec{v}_d}{Dt} = \ddot{\vec{R}}_1 + \ddot{\vec{R}}_{13} + \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{R}_{13} + \dot{\vec{\omega}}_3 \times \vec{\rho}_3 + \{2\vec{\omega}_1 \times \dot{\vec{R}}_{13} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{13}) + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{\rho}_3)\} \tag{7-3-24}$$

再注意

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_1 + \vec{\Omega}_3 = \underset{\sim}{b}_1^T \underset{\sim}{\omega}_1 + \underset{\sim}{b}_3^T \underset{\sim}{\Omega}_3 \tag{7-3-25}$$

其中 $\vec{\Omega}_3$ 是连同导向叶片的捕获环相对于连体基 $\underset{\sim}{b}_1$（追踪飞行器）的相对角速度．将（7-3-25）代入（7-3-24）的第四项，并整理，得

$$\vec{a}_d = \ddot{\vec{R}}_1 + \ddot{\vec{R}}_{13} + \dot{\vec{\omega}}_1 \times (\vec{R}_{13} + \vec{\rho}_3) + \dot{\vec{\Omega}}_3 \times \vec{\rho}_3 + \{2\vec{\omega}_1 \times \dot{\vec{R}}_{13} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{13}) + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{\rho}_3)\} \tag{7-3-26}$$

式中大括号 $\{\cdots\}$ 是非线性项，它的第一项是柯氏加速度，第二项及第三项是离心加速度．比照上式的线性部分，可以得出虚速度 $\delta\vec{v}_d$：

$$\delta\vec{v}_d = \delta\dot{\vec{R}}_1 + \delta\dot{\vec{R}}_{13} + \delta\vec{\omega}_1 \times (\vec{R}_{13} + \vec{\rho}_3) + \delta\vec{\Omega}_3 \times \vec{\rho}_3 \tag{7-3-27}$$

将（7-3-26）及（7-3-27）代入（7-3-18）式中，得出

$$\delta P_{Id} = -\int_d (\delta\dot{\vec{R}}_1 + \delta\dot{\vec{R}}_{13} + \delta\vec{\omega}_1 \times (\vec{R}_{13} + \vec{\rho}_3) + \delta\vec{\Omega}_3 \times \vec{\rho}_3) \cdot [(\ddot{\vec{R}}_1 + \ddot{\vec{R}}_{13} + \dot{\vec{\omega}} \cdot \times \vec{R}_{13} + \vec{\rho}_3) + \dot{\vec{\Omega}}_3 \times \vec{\rho}_3 + \{2\vec{\omega}_1 \times \dot{\vec{R}}_{13} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{13}) + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{\rho}_3)\}] dm$$

整理后，可得到连同导向叶片的捕获环的虚功率

$$\begin{aligned}
\delta P_{Id} = &- \delta\dot{\vec{R}}_1 \cdot [m_3\ddot{\vec{R}}_1 + m_3\ddot{\vec{R}}_{13} + \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{S}_{13} + \dot{\vec{\Omega}}_3 \times \vec{S}_3 + \{2m_3(\vec{\omega}_1 \times \dot{\vec{R}}_{13}) + m_3(\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{13})) + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{S}_3)\}] \\
&- \delta\dot{\vec{R}}_{13} \cdot [m_3\ddot{\vec{R}}_1 + m_3\ddot{\vec{R}}_{13} + \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{S}_{13} + \dot{\vec{\Omega}}_3 \times \vec{S}_3 + \{2m_3(\vec{\omega}_1 \times \dot{\vec{R}}_{13}) + m_3(\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{13})) + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{S}_3)\}] \\
&- \delta\vec{\omega}_1 \cdot [\vec{S}_{13} \times \ddot{\vec{R}}_1 + \vec{S}_{13} \times \ddot{\vec{R}}_{13} + \dot{\vec{J}}_{13} \cdot \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{J}}_{31} \cdot \dot{\vec{\Omega}}_3 + \{2\vec{S}_{13} \times (\vec{\omega}_1 \times \dot{\vec{R}}_{13}) + \vec{S}_{13} \times (\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{13})) + \vec{\omega}_3 \times \dot{\vec{J}}_{13} \cdot \vec{\omega}_3\}] \\
&- \delta\vec{\Omega}_3 \cdot [S_3 \times \ddot{\vec{R}}_1 + \vec{S}_3 \times \ddot{\vec{R}}_{13} + \dot{\vec{J}}_{31} \cdot \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{J}}_3 \cdot \dot{\vec{\Omega}}_3 + \{2\vec{S}_3 \times (\vec{\omega}_1 \times \dot{\vec{R}}_{13}) + \vec{S}_3 \times \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{13}) + \vec{\omega}_3 \times \dot{\vec{J}}_3 \cdot \vec{\omega}_3\}]
\end{aligned} \tag{7-3-28}$$

式中各系数见表 7－2.

表 7－2

$\underset{\sim}{F}_{\omega}=\int_T \underset{\sim}{T}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_2\underset{\sim}{T}\,dm$	
$\underset{\sim}{F}_{\dot{\omega}}=\int_T \underset{\sim}{T}^T\tilde{\dot{\underset{\sim}{\omega}}}_2\underset{\sim}{T}\,dm$	
$\underset{\sim}{F}_{\omega\omega}=\int_T \underset{\sim}{T}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_2\underset{\sim}{T}\,dm$	
$\underset{\sim}{H}=\int_T \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_2\underset{\sim}{T}\,dm$	目标飞行器的模态角动量系数
$\underset{\sim}{H}_{\omega}=\int_T \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_2\underset{\sim}{T}\,dm$	
$\underset{\sim}{H}_{\omega\omega}=\int_T \tilde{\underset{\sim}{\rho}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\,\underset{\sim}{T}\,dm$	
$\underset{\sim}{I}=\int_T \underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{T}\,dm$	
$\underset{\sim}{J}_1=\int_c \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_1^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_1 dm$	追踪飞行器的对 O_1 点的惯性张量阵
$\underset{\sim}{J}_3=\int_d \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_3^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_3 dm$	主动捕获环及导向叶片对 O_3 点的惯性张量阵
$\underset{\sim}{J}_{13}=\int_d \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{13}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{13} dm$	主动捕获环及导向叶片对 O_1 点的惯性张量阵
$\underset{\sim}{J}_{31}=\int_d \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_{13}^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_3 dm$	主动捕获环及导向叶片的交叉惯性张量阵
$\underset{\sim}{J}_2=\int_T \tilde{\underset{\sim}{\rho}}_2^T\tilde{\underset{\sim}{\rho}}_2 dm$	目标飞行器对 O_2 点的惯性张量阵
$m_1=\int_c dm$	追踪飞行器质量
$m_2=\int_d dm$	目标飞行器质量
$m_3=\int_d dm$	主动捕获环及导向叶片的质量
$\underset{\sim}{P}=\int_T \underset{\sim}{T}\,dm$	目标飞行器模态动量系数
$\underset{\sim}{S}_1=\int_c \underset{\sim}{\rho}_1 dm$	追踪飞行器对 O_1 点静矩，O_1 为质心时 $\underset{\sim}{S}_1=0$
$\underset{\sim}{S}_2=\int_T \underset{\sim}{\rho}_2 dm$	目标飞行器对 O_2 点静矩，O_2 为质心时 $\underset{\sim}{S}_2=0$
$\underset{\sim}{S}_3=\int_d \underset{\sim}{\rho}_3 dm$	主动捕获环及导向叶片对 O_3 的静矩
$\underset{\sim}{S}_{13}=\int_d \underset{\sim}{\rho}_{13} dm$	主动捕获环及导向叶片对 O_1 的静矩
$\vec{\rho}_{13}=\vec{R}_{13}+\vec{\rho}_3=\underset{\sim}{b}_1^T\underset{\sim}{\rho}_{13}$	

§3.3 目标飞行器的惯性力虚功率

再考虑目标飞行器的惯性力虚功率 δP_{IT}，

$$\delta P_{IT}=-\int_T \vec{a}_T\cdot\delta\vec{v}_T dm \tag{7-3-29}$$

式中 $\vec{a}_T$ 和 $\delta\vec{v}_T$ 分别是目标飞行器的微元质量 dm 的加速度向量与虚速度向量，积分遍及目标飞行器.

对于目标飞行器我们规定它是柔性飞行器，因而它的微元质量 dm 的位置向量为

$$\vec{R}_T=\vec{R}_2+\vec{\rho}_2+\vec{u} \tag{7-3-30}$$

其中 $\vec{R}_2$ 是目标飞行器的连体参考系 b_2 的原点 O_2 到惯性参考系中心的距离向量，在惯性参考系内定义 $\vec{R}_2=\underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{R}_2$；$\vec{\rho}_2$ 是目标飞行器的微元质量 dm 到 $\underset{\sim}{b}_2$ 原点 O_2 的变形前距离，在

$\underset{\sim}{b}_2$ 连体参考系内定义，$\vec{\rho}_2=\underset{\sim}{b}_2^T\underset{\sim}{\rho}_2$；$\vec{u}$ 是微元质量 dm 的弹性变形，在 b_2 连体参考系内定义，并且利用模态展开，即

$$\vec{u}=\vec{\underset{\sim}{T}}\,\underset{\sim}{\eta}=\underset{\sim}{b}_2^T\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{\eta} \tag{7-3-31}$$

式中 $\underset{\sim}{T}=[\underset{\sim}{T}_1,\ \underset{\sim}{T}_2,\ \cdots,\ \underset{\sim}{T}_k,\ \cdots]$ 是模态阵，其中的 $\underset{\sim}{T}_k$ 是第 k 阶模态列阵；$\underset{\sim}{\eta}$ 是模态坐标列阵．注意目标飞行器（因而它的连体参考坐标系 $\underset{\sim}{b}_2$）相对于惯性坐标系有绝对角速度 $\vec{\omega}_2$.

这样，目标飞行器的速度向量 $\vec{v}_T$，加速度向量 $\vec{a}_T$ 和虚速度 $\delta\vec{v}_T$ 就分别是

$$\vec{v}_T=\frac{D\vec{R}_T}{Dt}=\dot{\vec{R}}_2+\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_2+\dot{\vec{u}}+\vec{\omega}_2\times\vec{u} \tag{7-3-32}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_T=\frac{D\vec{v}_2}{Dt}=\ddot{\vec{R}}_2+\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{\rho}_2+\vec{\omega}_2\times(\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_2)+\ddot{\vec{u}}+\{2\vec{\omega}_2\times\dot{\vec{u}}+\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{u}\\+\vec{\omega}_2\times(\vec{\omega}_2\times\vec{u})\}\end{aligned} \tag{7-3-33}$$

$$\delta\vec{v}_T=\delta\dot{\vec{R}}_2+\delta\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_2+\delta\dot{\vec{u}} \tag{7-3-34}$$

将（7－3－33）和（7－3－34）代入（7－3－30），

$$\begin{aligned}\delta P_{IT}=-\int_T[&\ddot{\vec{R}}_2+\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{\rho}_2+\vec{\omega}_2\times(\vec{\omega}_2\times\vec{\rho}_2)+\ddot{\vec{u}}+\{2\vec{\omega}_2\times\dot{\vec{u}}+\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{u}+\vec{\omega}_2\times(\vec{\omega}_2\times\vec{u})\}]\\&\cdot[\delta\dot{\vec{R}}_2+\delta\vec{\omega}\times\vec{\rho}_2+\delta\dot{\vec{u}}]dm\end{aligned}$$

注意（7－3－31），整理后，得

$$\begin{aligned}\delta P_{IT}=&-\delta\vec{R}\cdot[m_2\ddot{\vec{R}}_2+\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{\underset{\sim}{S}}_2+\vec{\underset{\sim}{P}}\,\ddot{\underset{\sim}{\eta}}+\{2\vec{\omega}_2\times\vec{\underset{\sim}{P}}\,\dot{\underset{\sim}{\eta}}+\dot{\vec{\omega}}_2\times\vec{\underset{\sim}{P}}\,\underset{\sim}{\eta}\\&+\vec{\omega}_2\times(\vec{\omega}_2\times\vec{\underset{\sim}{S}}_2)+\vec{\omega}_2\times(\vec{\omega}_2\times\vec{\underset{\sim}{P}}\,\underset{\sim}{\eta})\}]\\&-\delta\vec{\omega}_2\cdot[\ddot{\vec{R}}_2\times\vec{\underset{\sim}{S}}_2+\vec{\underset{\sim}{J}}_2\cdot\dot{\omega}_2+\vec{\underset{\sim}{H}}\,\ddot{\underset{\sim}{\eta}}+\{2\vec{\omega}_2\times\vec{H}\dot{\eta}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{\underset{\sim}{H}}\,\underset{\sim}{\eta}\\&+\vec{\omega}_2\times\vec{\underset{\sim}{J}}_2\cdot\vec{\omega}_2+\vec{\omega}_2\times\vec{H}\cdot\omega\}]\\&-\delta\dot{\underset{\sim}{\eta}}^T[\vec{\underset{\sim}{P}}\cdot\ddot{\vec{R}}_2+\vec{H}\cdot\dot{\vec{\omega}}_2+\underset{\sim}{I}\,\ddot{\underset{\sim}{\eta}}+\{2\underset{\sim}{F}_\omega\dot{\underset{\sim}{\eta}}+\dot{\underset{\sim}{F}}_\omega\underset{\sim}{\eta}+\underset{\sim}{F}_{\omega\omega}\underset{\sim}{\eta}+\underset{\sim}{H}_\omega\dot{\omega}_2\}]\end{aligned} \tag{7-3-35}$$

式中各系数说明见表 7－2.

由（7－3－35），（7－3－28）及（7－3－15）三式之和，可以得出（7－3－6）式中的 P_I，即

$$P_I=P_{IC}+P_{Id}+P_{IT} \tag{7-3-36}$$

为节省篇幅，不再写出 P_I 的全部表达式．

§3.4 弹性力虚功率和外力虚功率

现在再考虑弹性力的虚功率．由于追踪飞行器及主动对接机构都设为刚体．只有目标飞行器是柔性飞行器，因此只有目标飞行器有弹性力的虚功率，它表达为

$$\delta P_{TT}=-\delta\dot{\underset{\sim}{\eta}}^T\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\eta} \tag{7-3-37}$$

其中 $\underset{\sim}{\Lambda}$ 是以目标飞行器的固有频率平方 ω_k^2 为主元元素的对角矩阵．

在弹性力虚功率中还要考虑关节的弹性力虚功率．在这里，缓冲阻尼器是提供弹性力的可移动关节．每个缓冲阻尼器提供力 $\vec{F}_{ai}$ 和力矩 $\vec{M}_{ai}$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$）．关节的相对

速度由 $\vec{R}_{13}$ 和 $\vec{\Omega}_3$ 表达．关节力及力矩与关节位移间关系根据缓冲器的结构形式而不同，我们在后面还要讨论．这些力和力矩产生的虚功率 δP_{T2} 则表达为

$$\delta P_{T2} = \sum_{i=1}^{6} \delta \dot{\vec{R}}_{13} \cdot \vec{F}_{ai} + \sum_{i=1}^{6} \delta \vec{\Omega}_3 \cdot \vec{M}_{ai} \qquad (7-3-38)$$

这个式子与（7－3－37）相比，少了一个负号，因为在这里这个负号应含在 $\vec{F}_{ai}$ 与 $\vec{M}_{ai}$ 中．

这样，弹性力总虚功率是

$$\delta P_T = \delta P_{T1} + \delta P_{T2} \qquad (7-3-39)$$

最后，再考虑外力的虚功率 δP_e.

在这里，我们再作如下约定：

1．在对接过程中，目标飞行器上的控制系统和推力系统全部关闭．

2．在对接过程中，在追踪飞行器上可能有推力 $\vec{P}$ 和控制力矩 $\vec{M}_{CT}$.

3．接触力 $\vec{F}$ 分别以大小相等而方向相反的值作用于目标飞行器及追踪飞行器．作用点是上一节确定的接触点，作用线由上一节的（7－2－22）—（7－2－27）判定，在这些式中叉乘的顺序可以调整，总以在两个飞行器上接触力 $\vec{F}$ 是压力时为正．这个 $\vec{F}$ 是接触力的主矢（即当有多个接触点时 $\vec{F}$ 是它们的合力），还有相应的主矩 $\vec{M}$.

这样，就有

$$\begin{aligned}\delta P_e = {} & \delta \dot{\vec{R}}_1 \cdot \vec{P} + \delta \vec{\omega}_1 \cdot \vec{M}_{CT} + (\delta \dot{\vec{R}}_1 + \delta \dot{\vec{R}}_{13}) \cdot \vec{F} + \delta \vec{\omega}_3 \cdot \vec{M} \\ & + \delta \vec{R}_2 \cdot \vec{F} + \delta \vec{\omega}_2 \cdot \vec{M}\end{aligned}$$

倘若令 $\vec{F}=\underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{F}$，$\vec{P}=\underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{P}$，$\vec{M}=\underset{\sim}{e}^T\underset{\sim}{M}$ 和 $\vec{M}_{CT}=\underset{\sim}{b}_1\underset{\sim}{M}_{CT}$，则上式的分量表示就是

$$\begin{aligned}\delta P_e = {} & \delta \dot{\underset{\sim}{R}}_1^T \underset{\sim}{P} + \delta \underset{\sim}{\omega}_1^T \underset{\sim}{M}_{CT} + \delta \underset{\sim}{R}_1^T \underset{\sim}{F} + \delta \underset{\sim}{R}_{13}^T \underset{\sim}{A}_{1e} \underset{\sim}{F} + \delta \underset{\sim}{\omega}_1^T \underset{\sim}{A}_{1e} \underset{\sim}{M} + \delta \underset{\sim}{\Omega}_3^T \underset{\sim}{A}_{3e} \underset{\sim}{M} \\ & + \delta \underset{\sim}{R}_2^T \underset{\sim}{F} + \delta \underset{\sim}{\omega}_2^T \underset{\sim}{A}_{2e} \underset{\sim}{M}\end{aligned} \qquad (7-3-40)$$

§3.5 对接动力学方程

将（7－3－40）的 δP_e，（7－3－39）的 δP_T 和（7－3－36）的 δP_I 以及组成它们的有关诸表达式，代入虚功率方程（7－3－6）式，整理后，并注意虚速度 $\delta \dot{\vec{R}}_1$，$\delta \dot{\vec{R}}_2$，$\delta \dot{\vec{R}}_{13}$，$\delta \vec{\omega}_1$，$\delta \vec{\omega}_2$，$\delta \vec{\Omega}_3$ 和 $\delta \underset{\sim}{\tau}$ 是独立的任意变分，则（7－3－6）式恒为零的条件是这些变分的系数项恒为零．由此即可得出在滑动和捕获阶段的动力学方程，这包括：

1．追踪飞行器在滑动和捕获阶段的动力学方程：

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{R}}_1, \qquad (7-3-41)$$

$$\vec{v}_{13} = \dot{\vec{R}}_{13} \qquad (7-3-42)$$

$$\begin{aligned}& (m_1 + m_3)\dot{\vec{v}}_1 + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{S}_1 + \vec{S}_{13}) + \vec{\Omega}_3 \times \vec{S}_3 + m_3 \dot{\vec{v}}_{13} \\ = {} & \vec{F} + \vec{P} - \{2m_3(\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{13}) + m_3(\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{13})) + (\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{S}_1)) \\ & + \vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_3 \times \vec{S}_3\}\end{aligned} \qquad (7-3-43)$$

$$\begin{aligned}& (\vec{S}_1 + \vec{S}_{13}) \times \dot{\vec{v}}_1 + \vec{S}_{13} \times \dot{\vec{v}}_{13} + (\vec{\vec{J}}_1 + \vec{\vec{J}}_{13}) \cdot \dot{\vec{\omega}}_1 + \vec{\vec{J}}_{31} \cdot \vec{\Omega}_3 \\ = {} & \vec{M} + \vec{M}_{CT} - \{\vec{\omega}_1 \times \vec{\vec{J}}_1 \cdot \vec{\omega}_1 + 2\vec{S}_{13} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{13}) \\ & + \vec{S}_{13} \times (\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{13})) + \vec{\omega}_3 \times \vec{\vec{J}}_{13} \cdot \vec{\omega}_3\}\end{aligned} \qquad (7-3-44)$$

2. 主动对接机构与导向叶片在滑动和捕获阶段的动力学方程：

$$m_3\dot{\vec{v}}_1 + m_3\dot{\vec{v}}_{13} + \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{S}_{13} + \dot{\vec{\Omega}}_1 \times \vec{S}_3 = \vec{F} - \sum_{i=1}^{6}\vec{F}_{ai} - \{2m_3(\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{13}) + m_3[\vec{\omega}_1 \times (\omega_1 \times R_{13})] + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times S_3)\} \tag{7-3-45}$$

$$\vec{S}_3 \times \dot{\vec{v}}_1 + \vec{S}_3 \times \dot{\vec{v}}_{13} + \vec{\vec{J}}_{31} \cdot \dot{\vec{\omega}}_1 + \vec{\vec{J}}_3 \cdot \dot{\vec{\Omega}}_3 = -\sum_{i=1}^{6}\vec{M}_{ai} + \vec{M} - \{2\vec{S}_3 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{13}) + \vec{S}_3 \times \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{13}) + \vec{\omega}_3 \times \vec{\vec{J}}_3 \cdot \vec{\omega}_3\} \tag{7-3-46}$$

3. 目标飞行器在滑动和捕获阶段的动力学方程：

$$\vec{v}_2 = \dot{\vec{R}}_2 \tag{7-3-47}$$

$$m_2\dot{\vec{v}}_2 + \dot{\vec{\omega}}_2 \times \vec{S}_2 + \vec{P}\ddot{\eta} = F - \{2\vec{\omega}_2 \times \vec{P}\dot{\eta} + \dot{\vec{\omega}}_2 \times \vec{P}\eta + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{S}_2) + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{P}\eta)\} \tag{7-3-48}$$

$$\vec{S}_2 \times \dot{\vec{v}}_2 + \vec{\vec{J}}_2 \cdot \dot{\vec{\omega}}_2 + \vec{H}\ddot{\eta} = \vec{M} - \{2\vec{\omega}_2 \times \vec{H}\dot{\eta} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{H}\eta + \vec{\omega}_2 \times \vec{J}_2 \cdot \omega_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{H} \cdot \omega_2 \tag{7-3-49}$$

$$\vec{P} \cdot \dot{\vec{v}}_2 + \vec{H} \cdot \dot{\vec{\omega}}_2 + I\ddot{\eta} + \Lambda\eta = -\{2F_\omega\dot{\eta} + \dot{F}_\omega\eta + F_{\omega\omega}\eta + \vec{H}_\omega \cdot \vec{\omega}\} \tag{7-3-50}$$

上述动力学方程也可以用矩阵形式表达．这种矩阵形式更适用于编制程序．在由向量形式写出矩阵形式时，要注意各量是在哪些坐标系内定义的．

1. 追踪飞行器

$$\underset{\sim}{v}_1 = \dot{\underset{\sim}{R}}_1 \tag{7-3-51}$$

$$\underset{\sim}{v}_{13} = \dot{\underset{\sim}{R}}_{13} \tag{7-3-52}$$

$$(m_1 + m_3)\dot{\underset{\sim}{v}}_1 - \underset{\sim}{A}_{e1}(\underset{\sim}{\tilde{S}}_1 + \underset{\sim}{\tilde{S}}_{13})\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 + m_3\underset{\sim}{A}_{e1}\dot{\underset{\sim}{v}}_{13} - \underset{\sim}{A}_{e3}\underset{\sim}{\tilde{S}}_3\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_3 = \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{P} + \{2m_3\underset{\sim}{A}_{e1}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_1\underset{\sim}{v}_{13} + m_3\underset{\sim}{A}_{e1}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_1\tilde{\underset{\sim}{R}}_{13}\underset{\sim}{\omega}_1 - \underset{\sim}{A}_{e3}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_3\underset{\sim}{\tilde{S}}_3\underset{\sim}{\omega}_3 - \underset{\sim}{A}_{e1}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_1\underset{\sim}{\tilde{S}}_1\underset{\sim}{\omega}_1\} \tag{7-3-53}$$

$$-(\underset{\sim}{\tilde{S}}_1^T + \underset{\sim}{\tilde{S}}_{13}^T)\underset{\sim}{A}_{1e}\dot{\underset{\sim}{v}}_1 + (\underset{\sim}{J}_1 + \underset{\sim}{J}_{13})\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 - \underset{\sim}{\tilde{S}}_{13}\dot{\underset{\sim}{v}}_{13} + \underset{\sim}{J}_{31}\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_3 = \underset{\sim}{A}_{1e}\underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{M}_{CT} + \{-\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_1\underset{\sim}{J}_1\underset{\sim}{\omega}_1 - 2\underset{\sim}{\tilde{S}}_{13}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_1\underset{\sim}{v}_{13} + \underset{\sim}{\tilde{S}}_{13}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_1\tilde{\underset{\sim}{R}}_{13}\underset{\sim}{\omega}_1 - \underset{\sim}{A}_{13}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_3\underset{\sim}{J}_{13}\underset{\sim}{\omega}_3\} \tag{7-3-54}$$

2. 主动对接环与导向叶片组

$$m_3\underset{\sim}{A}_{1e}\dot{\underset{\sim}{v}}_1 - \underset{\sim}{\tilde{S}}_{13}^T\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 + m_3\dot{\underset{\sim}{v}}_{13} - \underset{\sim}{A}_{13}\underset{\sim}{\tilde{S}}_3\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_3 = \underset{\sim}{A}_{1e}\underset{\sim}{F} - \sum_{i=1}^{6}\underset{\sim}{F}_{ai} - \{2m_3\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_1\underset{\sim}{v}_{13} - m_3\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_1\tilde{\underset{\sim}{R}}_{13}\underset{\sim}{\omega}_1 - \underset{\sim}{A}_{13}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_3\underset{\sim}{\tilde{S}}_3\underset{\sim}{\omega}_3\} \tag{7-3-55}$$

$$-\underset{\sim}{S}_3^T\underset{\sim}{A}_{3e}\dot{\underset{\sim}{v}}_1 + \underset{\sim}{J}_{31}^T\underset{\sim}{\omega}_1 - \underset{\sim}{\tilde{S}}_3^T\underset{\sim}{A}_{31}\dot{\underset{\sim}{v}}_{13} + \underset{\sim}{J}_3\dot{\underset{\sim}{\Omega}}_3 = \underset{\sim}{A}_{3e}\underset{\sim}{M} - \sum_{i=1}^{6}\underset{\sim}{M}_{ai} - \{2\underset{\sim}{\tilde{S}}_3\underset{\sim}{A}_{31}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_1\underset{\sim}{v}_1 - \underset{\sim}{\tilde{S}}_3\underset{\sim}{A}_{31}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_1\tilde{\underset{\sim}{R}}_{13}\underset{\sim}{\omega}_1 + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_3\underset{\sim}{J}_3\underset{\sim}{\omega}_3\} \tag{7-3-56}$$

3. 目标飞行器

$$\underset{\sim}{v}_2 = \dot{\underset{\sim}{R}}_2$$

$$m_2\dot{\underset{\sim}{v}}_2 - \underset{\sim}{A}_{e2}\underset{\sim}{\tilde{S}}_2\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2 + \underset{\sim}{A}_{e2}\underset{\sim}{P}\ddot{\underset{\sim}{\eta}} = \underset{\sim}{F} - \{2\underset{\sim}{A}_{e2}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_2\underset{\sim}{P}\dot{\underset{\sim}{\eta}} + \underset{\sim}{A}_{e2}\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_2\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{\eta}$$

$$-\underset{\sim}{A}_{r2}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_2\tilde{\underset{\sim}{S}}_2\underset{\sim}{\omega}_2+\underset{\sim}{A}_{r2}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_2\underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{\eta}\} \tag{7-3-57}$$

$$-\underset{\sim}{S}_2^T\underset{\sim}{A}_{2r}\dot{\underset{\sim}{v}}_2+\underset{\sim}{J}_2\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2+\underset{\sim}{H}\,\ddot{\underset{\sim}{\eta}}=\underset{\sim}{A}_{2r}\underset{\sim}{M}-\{2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_2\underset{\sim}{H}\,\dot{\underset{\sim}{\eta}}+\dot{\tilde{\underset{\sim}{\omega}}}_2\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{\eta}+\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_2\underset{\sim}{J}_2\underset{\sim}{\omega}_2+\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_2\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{\omega}_2\} \tag{7-3-58}$$

$$\underset{\sim}{P}^T\underset{\sim}{A}_{r2}\dot{\underset{\sim}{v}}_2+\underset{\sim}{H}^T\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2+\underset{\sim}{I}\,\ddot{\underset{\sim}{\eta}}+\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\eta}=-\{2\underset{\sim}{F}_{\omega}\dot{\underset{\sim}{\eta}}+\underset{\sim}{F}_{\omega}\underset{\sim}{\eta}+\underset{\sim}{F}_{\omega\omega}\underset{\sim}{\eta}+\underset{\sim}{H}_{\omega}\underset{\sim}{\omega}\} \tag{7-3-59}$$

由（7-3-51）式到（7-3-59）式的动力学方程，连同（7-3-1）到（7-3-4）的动态约束条件构成了滑动和捕获阶段的对接动力学模型．再利用在接近与接触阶段终了时求得的接触点位置，和对接初始条件，可以做滑动与捕获阶段的对接动力学仿真．

这里请注意，在（7-3-1）式到（7-3-4）式的对接动态约束条件中，g_{iu}（和q_7）与参数u有关，q_{jv}（和q_7）与参数v有关，而u和v是逐步由初次接触点u_0和v_0（由第二节方法确定）变化到特定值，即

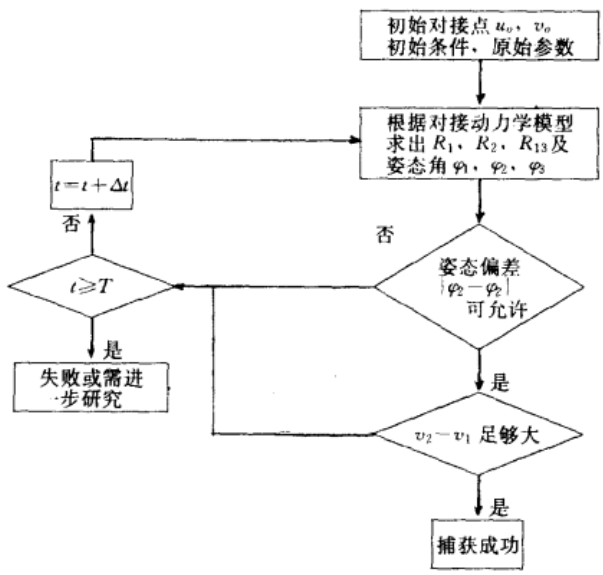
$$u=u_0-at \tag{7-3-60}$$

$$v=v_0-bt \tag{7-3-61}$$

a和b是由接近速度在u，v滑动方向的分量求出的．u和v自初次接触点u_0和v_0向特定值变化，就意味着滑动．由于有初始条件，滑动伴随着一定量的冲击，就是说同时发生由（7-3-51）到（7-3-60）诸式描述的动力学过程．这时$\underset{\sim}{v}_1$，$\underset{\sim}{\omega}_1$，$\underset{\sim}{v}_2$，$\underset{\sim}{\omega}_2$，$\underset{\sim}{v}_3$，$\underset{\sim}{\Omega}_3$都将不断改变．

显然，当主动对接机构的捕获环相对于惯性坐标系的姿态角（即与ω_3对应的姿态角）与目标飞行器相对于惯性坐标系的姿态角（即与ω_2对应的姿态角）之间相对偏差达到某一规定值时，即认为两对捕获环和导向叶片上的捕获锁可以相互对准．倘若这时沿X方向（飞行方向）又有足够的运动速度时，即可认为捕获锁可以起作用，即捕获成功．

滑动与捕获过程可以用下面的框图简明地表示出来．



在本节最后，我们顺便说明，（7-3-51）—（7-3-59）可由各惯性力虚功率直接

经矩阵运算求得．结果只有一项稍有不同，即 $\tilde{\omega}J\omega$ 变成 $J_\omega\omega$，其中

$$J_\omega = \int \tilde{\rho}^T\tilde{\omega}\,\tilde{\rho}\,dm$$

但可以证明

$$J_\omega\omega = \tilde{\omega}\,J\,\omega$$

§4. 调整与紧固阶段的动力学方程

在捕获阶段结束时，两个飞行器上的对接机构上的捕获环上的捕获锁与对方的导向叶片上的捕获锁对应地一一锁紧．紧固则是由两个飞船的对接环上的结构锁执行的．对接环分别固定在飞船上．在捕获结束时，由捕获锁锁紧的两个飞行器的一对捕获环，相对于追踪飞行器（因而也是相对于它的对接环）之间尚有距离 R_{13a} 和相对姿态角 φ_{13a}（φ_{13} 是与 Ω_3 对应的姿态角），调整与紧固阶段的工作就是通过缓冲阻尼器的作用，调整捕获环（连同锁在一起的目标飞行器），使捕获环达到规定位置 R_{13b}（这时两飞行器的对接环靠拢），并使其相对姿态角 $\varphi_{13b}=0$（这时两个对接环上的结构锁相互对准）．下一步，通过两对接环上的结构锁起作用，而将两个飞船紧固成一体．这样就完成了全部的对接操作．

调整与紧固阶段与滑动与捕获阶段相比有以下特点：

1．在调整与紧固阶段，当然不再施加控制力矩及推力，即 $\vec{M}_{CT}=0$ 和 $\vec{P}=0$.

2．在调整与紧固阶段，使 $\vec{R}_{13a}$ 达到 $\vec{R}_{13b}$ 和 φ_{13a} 达到 φ_{13b} 的过程是运动规律（或称调整规律）是要进行设计的．例如可以规定一个简单的线性化的规律，即

$$\vec{R}_{13} = \vec{R}_{13a}\left(1-\frac{t}{t_1}\right)+\vec{R}_{13b}\left(\frac{t}{t_1}\right) \qquad (7-4-1)$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{13a}\left(1-\frac{t}{t_1}\right) \qquad (7-4-2)$$

式中 t_1 是预先规定的调整阶段的时间．

3．调整阶段与滑动阶段相比是较缓和的过程．

这几个特点可以使调整与紧固阶段的动力学方程被简化．

调整阶段的缓和性的特点，意味着这一阶段的角速度和速度都是较小的量，因而在（7－3－44）—（7－3－56）诸式中的大括号｛…｝内非线性项都可以加以忽略，而只保存与离心加速度有关的项，如 $\tilde{\omega}_i J_i \omega_i$.

其次，根据（7－4－1）和（7－4－2）的调整规律，可有

$$\vec{v}_{13} = \dot{\vec{R}}_{13} \qquad (7-4-3)$$

$$\vec{\Omega}_3 = \dot{\vec{\varphi}}_{13} \qquad (7-4-4)$$

其中 $\vec{\varphi}_{13}$ 一般是一个伪坐标，因此（7－4－4）具有形式的意式．上两式说明 $\vec{v}_{13}$ 和 $\vec{\Omega}_3$ 都是有指定规律的，因而 $\vec{v}_{13}$ 和 $\vec{\Omega}_3$ 都是已知值，例如在（7－4－1）和（7－4－2）的调节规律下，它们全是零．这又使追踪飞行器动力学方程进一步简化，

$$\dot{\vec{\underset{\sim}{v}}}_1 = \dot{\vec{\underset{\sim}{R}}}_1 \qquad (7-4-5)$$

$$(m_1+m_3)\dot{\underset{\sim}{v}}_1 - \underset{\sim}{A}_{e1}(\tilde{\underset{\sim}{S}}_1+\tilde{\underset{\sim}{S}}_{13})\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1 = \underset{\sim}{F} \qquad (7-4-6)$$

$$-(\underset{\sim}{S}_1^T+\underset{\sim}{S}_{13}^T)\underset{\sim}{A}_{1e}\dot{\underset{\sim}{v}}_1+(\underset{\sim}{J}_1+\underset{\sim}{J}_{13})\dot{\underset{\sim}{\omega}}_1=\underset{\sim}{A}_{1e}\underset{\sim}{M} \tag{7-4-7}$$

$$\underset{\sim}{v}_2=\dot{\underset{\sim}{R}}_2 \tag{7-4-8}$$

$$m_2\dot{\underset{\sim}{v}}_2-\underset{\sim}{A}_{e2}\tilde{\underset{\sim}{S}}_2\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2+\underset{\sim}{A}_{e2}\underset{\sim}{P}\,\ddot{\underset{\sim}{\eta}}=\underset{\sim}{F} \tag{7-4-9}$$

$$-\underset{\sim}{S}_2^T\underset{\sim}{A}_{2e}\dot{\underset{\sim}{v}}_2+\underset{\sim}{J}_2\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2+\underset{\sim}{H}\,\ddot{\underset{\sim}{\eta}}=\underset{\sim}{A}_{2e}\underset{\sim}{M} \tag{7-4-10}$$

$$\underset{\sim}{P}^T\underset{\sim}{A}_{2e}\dot{\underset{\sim}{v}}_2+\underset{\sim}{H}^T\dot{\underset{\sim}{\omega}}_2+\underset{\sim}{I}\,\ddot{\underset{\sim}{\eta}}+\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\eta}=0 \tag{7-4-11}$$

对于主动对接环与导向叶片组，由于已有的条件，再假设 m_3 和 $\underset{\sim}{S}_{13}$ 等值很小，它们可以简化为

$$\underset{\sim}{A}_{1e}\underset{\sim}{F}-\sum_{i=1}^{6}\underset{\sim}{F}_{ai}=0 \tag{7-4-12}$$

$$\underset{\sim}{A}_{3e}\underset{\sim}{M}-\sum_{i=1}^{6}\underset{\sim}{M}_{ai}=0 \tag{7-4-13}$$

就是说由动力学关系简化为静力学关系．

又，捕获环已被紧固成一体，又提供了一个新的条件

$$\vec{R}_1+\vec{R}_{13}-\vec{R}_2-\vec{R}_{24}=0 \tag{7-4-14}$$

这样，(7-4-5) 到 (7-4-11) 和 (7-4-1) 和 (7-4-2) 以及 (7-4-12)，(7-4-13) 和 (7-4-14) 组成了调整与紧固阶段的动力学模型．

最后，顺便说明，在紧固阶段完成后，两个飞行器连接成一个整体，得到新的复合飞行器．这个新的复合飞行器的轨道和姿态参数，可以在原来的目标飞行器和跟踪飞行器在调整与紧固阶段结束时的轨道及姿态参数的基础上加以确定．因此，在调整与紧固阶段结束时，需要输出这些参数．

在本节及上一节中，都提及缓冲阻尼器的力 F_{ai}．缓冲阻尼器的力 F_{ai} 的方向是沿缓冲阻尼器的轴线的，其大小与缓冲阻尼器的轴线方向的变形 ξ_i 及变形速度 $\dot{\xi}_i$ 有关，即

$$F_{ai}=f_{ai}(\xi_i,\zeta_i)\qquad i=1,2,\cdots,6 \tag{7-4-15}$$

f_{ai} (ξ_i，ζ_i) 的具体形式与缓冲阻尼器的类型有关．对它的讨论超出了本书的范围．

在本节最后，我们给出一个算例[100]．在算例中：

追踪飞行器的惯性特性为：

质量 $m_1=1.410\times10^3\text{kg}$

绕质心的惯性张量为

$$\underset{\sim}{J}_1=\begin{bmatrix}0.2246\times10^4 & 0 & 0\\ 0 & 0.6201\times10^4 & 0\\ 0 & 0 & 0.6201\times10^4\end{bmatrix}\text{kg}\cdot\text{m}$$

目标飞行器的惯性特性为

质量 $m_2=0.5301\times10^4\text{kg}$

绕质心的惯性张量为

$$\underset{\sim}{J}_2=\begin{bmatrix}0.7395\times10^5 & 0 & 0\\ 0 & 0.2889\times10^6 & 0\\ 0 & 0 & 0.2846\times10^6\end{bmatrix}\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

主动法兰盘的惯性特性：

质量 $m_3=20\text{kg}$

绕中心的惯性张量为

$$\underline{J}_3 = \begin{bmatrix} 0.1 \times 10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.72 \times 10^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.72 \times 10^1 \end{bmatrix} \text{kg} \cdot \text{m}$$

计算共考虑了六种情况．这六种情况，初始条件只有追踪飞行器的速度和角速度是不同的，其他初始条件是相同的，这些相同的初始条件为：

追踪飞行器质心在惯性系的位置：由约束方程决定；

追踪飞行器相对于惯性空间的姿态：(0°,0°,1°)；

主动法兰盘中心相对于追踪坐标系的位值：(350m,0,0)；

主动法兰盘中心相对于追踪坐标系的姿态：(0,0,0)；

主动法兰盘中心相对于追踪器的角速度：(0,0,0)；

目标飞行器质心在惯性系的位值：(0,0,0)；

目标飞行器质心在惯性系的速度：(0,0,0)；

目标飞行器相对于惯性空间的姿态：(0,0,0)；

目标飞行器相对于惯性空间的角速度：(0,0,0)；

进行数值仿真可得到捕获阶段追踪飞行器相对于惯性空间的姿态，主动法兰盘相对于追踪飞行器的姿态；目标飞行器相对于惯性空间的姿态，两法兰盘相对于追踪器的姿态，目标飞行器相对于惯性空间的姿态，两法兰盘相互姿态；对接机构收缩阶段主动法兰盘相对于追踪飞行器的姿态，追踪飞行器和目标飞行器相对于惯性空间的姿态；两飞行器耦合后，复合飞行器的姿态与角速度．

第一种情况追踪飞行器初始速度为(0.3m/s,0,0)；初始角速度为(0,0,1°/s)；无推力；无控制，在 $t=6.03$ 秒成功捕获．

第二种情况追踪飞行器的初始速度为(0.3m/s,0,0)；追踪飞行器的初始角速度为(0,0,1°/s)；追踪飞行器上有 200kg 的推力，无控制系统作用，在 $t=5.31$ 秒成功捕获．

第三种情况追踪器初始速度为(0.3m/s,0,0)；追踪飞行器的初始角速度为(0,0,1°/s)；无推力，受有控制系统使用．在 $t=6.01$ 秒成功捕获．

第四种情况追踪器初始速度为(0.3m/s,0,0)，初始角速度为(0,0,1°/s)；有 200kg 轴向推力，无控制系统作用；在 $t=5.41$s 成功捕获．

第五种情况追踪飞行器的初始速度为(0.3m/s,0,0.1m/s)，初始角速度为(0,0,1°/s)，有 200kg 轴向推力，无控制系统使用；在 $t=6.01$s 成功捕获．

第六种情况追踪飞行器的初始速度为(0.3m/s,0,0)，初始角速度为(0,1°/s,1°/s)，有 200kg 轴向推力，有控制系统作用；没有实现捕获．

第八章　柔性机械臂振动控制的逆动力学方法

§1. 引　　言

随着工业的发展，工业机器人的应用日益广泛. 同传统的刚性机器人相比，采用轻质、柔性构件的工业机器人具有更快的反应速度、更高的工作效率和更低的能耗，但由此带来的振动问题往往严重影响其正常工作，降低了工作效率，使其难以精确定位.

消除柔性工业机器人的振动可采用主动控制、被动控制以及逆动力学控制等方法.

被动控制又称无源控制，是通过选用各种耗能和储能材料合理地设计结构来减振，如粘弹性大阻尼材料及压电晶体的应用等. 然而，被动控制对振动的抑制是有限度的，粘弹性材料价格昂贵，阻尼的增加也有限，而且无法降低关节振动.

柔性机器人振动的主动控制又称有源控制，是近年来国内外研究的热点，是消除柔性影响的有效途径，已经提出和研究了多种控制方案. 但是目前振动的主动控制还存在一些应用上的困难.

近年来提出的柔性机器人逆动力学[9]（Inverse Dynamics of Robots）是一种很有特色的对柔性机器人的振动控制方式. 其目的是通过合理设计机器人铰链处的输入力（矩），使柔性机器人末端作用器完成特定的运动或跟踪特定的轨迹的同时有效地抑制或消除弹性振动. 这是抑制柔性机械臂弹性振动的一种开环控制方法，由于其输入可以离线计算，避免了主动控制实时计算的困难，是一种很有前途的方法. 但由于柔性机器人逆动力学是一个刚开始研究的领域，还处于发展初期，已经提出的一些方法还很不成熟，并且具有局限性，因此，有待于研究更普遍、更有效的方法.

目前柔性机器人或机械臂逆动力学的研究在国外已逐渐开展起来[9,6,7,16]，国内还处于起步阶段[85~89,122].

早在 1988 年，C. J. Swigert[79]研究了柔性结构的输入的优化计算问题，给出了使结构在一定的时间内产生要求的运动，并且不激发各阶模态振动的输入，为柔性机器人逆动力学发展提供了基础.

柔性机械臂逆动力学的研究应首推 E. Bayo 等人的工作[9]. 他根据 Hamilton 原理应用有限元方法建立柔性机械臂的动力学方程，将方程变换到频域，提出了频域迭代的逆动力学方法. 最后再将频域上的逆动力学分析结果变换到时域，分别对单连杆和双连杆机械臂作了详细的理论推导、数值模拟和实验研究，取得了一些成果. 然而他们提出的方法计算量大、收敛性不好、通用性差.

考虑到柔性连杆相对弹性变形的影响，H. Asada 和 Z. D. Ma[6]借助于引入虚刚体坐标系消除了动力学方程中不同柔性连杆模态坐标之间的耦合作用，使柔性机械臂轨迹追踪问题的逆动力学计算得到很大程度的简化. 郭吉丰和童忠钫[122]则是将动力学关系和动力学方程在刚性模型假设下的位姿附近进行线性化，建立了可用于柔性机械臂逆动力学分析的线性解耦的数学模型. 但以上方法都得对柔性机械臂刚柔耦合运动作近似的数

值计算，甚至要依赖于特定的动力学模型，因而实际应用中可能产生很大的控制误差.

柔性机械臂控制的目的是要在实现铰关节准确定位的同时，有效地降低柔性连杆的相对弹性振动，以保证爪端的定位精度. D. M. Aspinwall[7]在抑制弹性体残余振动时采用了脉冲控制方法. A. D. Christian[17]系统研究了在多种形式的控制输入作用下臂结构的相对弹性振动，结果表明弹性变形的大小不仅与输入形式有关，同时也取决于运动时间及臂结构的固有频率. B. V. Chapnik[16]提出了控制受冲击柔性机械臂自由振动的逆动力学方法. Singer 和 Seering[72]则是将脉冲序列叠加到给定的控制输入上，有效地降低了弹性体的相对弹性振动. 上述方法都是只强调对柔性体相对弹性振动的控制，而忽视了铰关节和机械臂爪端的精确定位.

由于柔性机械臂的研究涉及力学、机械、控制理论、计算机应用和分析测试技术等各个领域，目前的研究工作还主要局限于理论分析和数值仿真阶段，实验研究还进行的较少，并且还很不完善.

L. D. Zavodnery 等人建立了末端具有集中质量的弹性杆的非线性响应的实验装置；N. G. Chalhoub 等人以及 R. H. Cannon 等人进行了具有单个转动铰的平面柔性机械臂的控制实验；C. M. Okley 设计了一个具有柔性很大前臂的双杆平面柔性机械臂的测控实验装置，并取得了较好的实验结果，而 F. Matsuno 等人研究了具有平行驱动装置的柔性机械臂的反馈控制实验；E. Bayo 等人[9]对柔性机械臂的逆动力学进行了较完善的实验研究，其实验装置可进行单杆的实验，也可向一般多杆扩展，他采用先进的红外传感器确定机械臂的刚体位置和末端振动；在国内范子杰[123]设计了具有两个转动铰的平面柔性机械臂的实验装置，并进行了粘弹性大阻尼的控制实验研究，他采用加速度计通过特殊的滤波、积分手段获得机械臂的刚体运动和弹性振动信息.

然而在这些实验装置中还仅含有一个柔性连杆，用于实验研究时往往仅保留一个整体运动的自由度. 迄今为止，涉及到由多个柔性连杆组成的机械臂的实验研究还未见到过报道.

在柔性机械臂的实验装置中一般采用直流伺服电机或直流力矩电机作为执行机构，为了控制臂结构的相对弹性振动，要求电机具有较好的控制特性和机械特性. 直流力矩电机易于控制，但当输出力矩值较低时，力矩会发生波动，影响控制效果. 直流伺服电机输出力矩小、转速高，需与谐波减速器串联使用，谐波齿轮的柔性是形成弹性铰关节的重要原因，但当臂结构柔性较大时，往往将铰关节的弹性变形忽略不计.

控制算法的计算时间限制了控制信号的采样频率不可能很大，为了实现对弹性振动的控制，就得要求臂结构具有较大的柔性. 不过由于传感器的低频特性较差，且当臂结构柔性较大时，弹性振动的低频信号易与由整体运动引起的干扰信号相混叠，因而又得使臂结构具备一定的刚性.

铰的位置和转速一般是通过光电编码器和测速电机来检测，而对臂结构弹性变形的测量则使用了光电控测器、应变片、加速度计等多种传感器. 光电传感器适合对爪端运动位置的测量，但成本较高、安装的使用不很方便. 应变片的测量精度取决于模态辨识的准确程度，当应变片位置较靠近铰关节时，可近似认为传感器与控制器是同位配置的. 加速度计是用于爪端加速度测量，当整体运动幅度较大时，通过积分器得到的爪端运动速度和位置会有一定的误差. 在采用加速度计作为传感器时，控制器与传感器是非同位

配置的，传感器与控制器之间的传递函数为非最小相位系统，控制系统是有条件稳定的，此时鲁棒性问题应引起特别的重视.

在系统建模过程中，通过模态截断实现了用有限自由度代替柔性臂结构的无限多自由度，但也同时导致了在进行柔性机械臂主动控制时，观测溢出和控制溢出问题的出现，并可能加剧已模化模态的振动或使未模化模态丧失稳定性. 不过采用滤波器有助于限制观测溢出的影响，而结构内部阻尼的存在或通过人为的增加结构阻尼则可增强未模化模态的稳定性.

本章将介绍作者近期在柔性机械臂逆动力学研究方面所作的部分工作，包括几种各具特色的逆动力学分析方法和用逆动力学分析结果对简单柔性机械臂的开环控制实验.

§2. 简单柔性机械臂基于谱分析的构造性逆动力学方法

如图 8－1 所示，简单柔性机械臂是只含有一个转动铰和一个柔性杆的平面机械臂，工程中许多机械手可以模化或分解为这种模型，因此对于这种机械臂的逆动力学问题研究具有重要的应用价值.

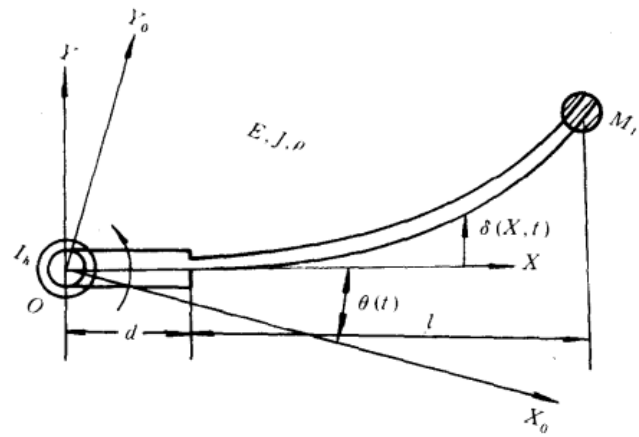


图 8－1　简单柔性机械臂示意图

§2.1　简单柔性机械臂的模型

如图 8－1 所示，假设机械臂为等截面均匀梁，在平面内运动，忽略剪切变形和转动效应.

图中符号含义如下：

OX_0Y_0 ——惯性坐标系；

OXY ——与机械臂固连的动坐标系，OX 轴同臂杆的未变形轴线相重合；

l ——机械臂的长度；

ρ ——机械臂的线密度；

M_t ——柔性臂杆末端集中质量；

J ——柔性杆截面惯性矩；

E ——材料杨氏模量；

I_h ——除柔性杆外臂结构对轴的转动惯量：

$\tau(t)$ ——驱动力矩；

θ ——机械臂刚体转角.

由模态展开方法，杆的相对弹性变形 $w(x,t)$ 可表示为

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)\delta_i(t) \tag{8-2-1}$$

式中，$\varphi_i(x)$ 为柔性杆的一组正则振型函数；

$\delta_i(t)$ 为相应的模态坐标.

应用第二类 Lagrange 方程可建立简单柔性机械臂的运动方程如下[86]：

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{I_h+\rho\int_0^l x^2dx+M_tl^2+\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i^2+M_t\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)\delta_i\Big]^2\right\}\ddot{\theta}\\
&+\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\rho\int_0^l\varphi_i(x)xdx+M_tl\varphi_i(l)\Big]\ddot{\delta}_i+2\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i\dot{\delta}_j\Big]\dot{\theta}\\
&+2M_t\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)\delta_i\Big]\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)\dot{\delta}_i\Big]\dot{\theta}=\tau(t)\\
&\Big[\rho\int_0^1\varphi_j(x)xdx+M_t\varphi_j(l)l\Big]\ddot{\theta}+\ddot{\delta}_j+M_t\varphi_j(l)\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)\ddot{\delta}_i\\
&-\Big[\delta_j+M_j\varphi_j(l)\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)\delta_i\Big]\dot{\theta}^2+\omega_j^2\delta_j=0
\end{aligned}\right\} \tag{8-2-2}$$

式中，ω_j（$j=1,2,\cdots$）为柔性杆的 j 阶固有频率.

为了简化分析和运算，在满足一定精度要求的前提下，常取二阶模态截断，式（8-2-2）化为

$$\left.\begin{aligned}
&(a_1+a_2\delta_1^2+a_3\delta_1\delta_2+a_4\delta_2^2)\ddot{\theta}+a_5\ddot{\delta}_1+a_6\ddot{\delta}_2+a_7\dot{\theta}\,\dot{\delta}_1\dot{\delta}_1+a_8\dot{\theta}\,\dot{\delta}_2\dot{\delta}_2\\
&\quad+a_9\dot{\theta}\,\dot{\delta}_1\dot{\delta}_2+a_{10}\dot{\theta}\,\dot{\delta}_1\dot{\delta}_2=\tau(t)\\
&b_1\ddot{\theta}+b_2\ddot{\delta}_1+b_3\ddot{\delta}_2+b_4\dot{\theta}^2\delta_1+b_5\dot{\theta}^2\delta_2+b_6\delta_1=0\\
&c_1\ddot{\theta}+c_2\ddot{\delta}_1+c_3\ddot{\delta}_2+c_4\dot{\theta}^2\delta_1+c_5\dot{\theta}^2\delta_2+c_6\delta_2=0
\end{aligned}\right\} \tag{8-2-3}$$

在慢转动、小振动假设下，略去 $\dot{\theta}$，$\dot{\delta}_i$ 和 δ_i 的二次以上项，可得线性方程如下：

$$\left.\begin{aligned}
&a_1\ddot{\theta}+a_5\ddot{\delta}_1+a_6\ddot{\delta}_2=\tau(t)\\
&b_1\ddot{\theta}+b_2\ddot{\delta}_1+b_3\ddot{\delta}_2+b_6\delta_1=0\\
&c_1\ddot{\theta}+c_2\ddot{\delta}_1+c_3\ddot{\delta}_2+c_6\delta_2=0
\end{aligned}\right\} \tag{8-2-4}$$

式（8-2-3），（8-2-4）中各常数 $a_1\cdots c_6$ 同机械臂的物理参数和模态参数有关，计算式见文献［86］.

§2.2 逆动力学方法的基本原理

对于一个简单的刚性机械臂，为了限制输入力矩的幅度并实现转动的快速性，实现

某一刚体转动的输入力矩常用图 8－2 所示的阶跃形式. 但是这样的输入力矩作用在柔性机械臂上，将会激起很大的弹性振动. 对激起振动的频谱分析[86]表明，振动的能量主要来自柔性梁固有频率附近的激励. 当机械臂的弹性加大时，由于固有振动的时变性，使这种激励具有围绕柔性梁“名义固有频率”分布的特征. 因此本节所述的构造性方法使

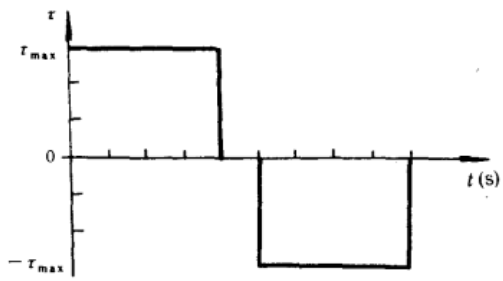


图 8－2　刚性机械臂的典型输入力矩

以臂结构固有频率为中心的一定频带内的输入能量很小或为零.

若要求简单柔性机械臂在 $[0, 2T]$ 时间内由静止转动 θ_m 角度后停止，我们可以只考虑确定 $[0, T]$ 内的输入力矩，保证在 T 时刻机械臂转过 $\theta_m/2$ 角度，$[T, 2T]$ 时间内的输入力矩由下式给出：

$$\tau(T+t) = -\tau(T-t) \quad t \in [T, 2T] \tag{8-2-5}$$

将输入力矩 $\tau(t)$，$t \in [0, T]$ 表示成一组定义在 $[0, T]$ 上的时间函数的加权和形式：

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^{L} C_i Q_i(t) \tag{8-2-6}$$

式中，C_i 为待定权系数值，一般 $Q_i(t)$ 应满足：

1°连续、可导；

2° $\lim\limits_{L\to\infty} \dfrac{1}{L}\sum\limits_{i=1}^{L} Q_i(t) = R$，$R$ 为有限正常数.

构造输入力矩 $\tau(t)$，$t \in [0, T]$，即在已知 $Q_i(t)$，$(i=1, \cdots L)$ 时确定数值 C_i 的过程，可分以下几步：

(1)求 $Q_i(t)(i=1, \cdots, L)$ 的 Fourier 积分 $Q_i^*(j\omega)$；

(2)写出 $\tau(t)$ 的 Fourier 积分表达式：

$$\tau^*(j\omega) = \sum_{i=1}^{L} C_i Q_i^*(j\omega) \tag{8-2-7}$$

(3)求泛函：

$$J = \frac{l}{T}\int_0^T \left[l - \sum_{i=1}^{L} C_i Q_i(t)\right]^2 dt + \sum_{j=1}^{n} \rho_j \int_{\omega_j - b\omega_j}^{\omega_j + b\omega_j} |\tau^*(j\omega)|^2 d\omega \tag{8-2-8}$$

在约束式

$$\sum_{i=1}^{L} C_i = 1.0 \tag{8-2-9}$$

成立下的极值问题，即满足：

$$\frac{\partial J}{\partial C_i} = 0 \qquad (i = 1, \cdots L) \tag{8-2-10}$$

式(8-2-8)右端第一项是限制所构造的输入力矩同阶跃输入的差异，以实现转动的快速性和减小力矩波动；第二项是制约各阶固有频率附近的输入能量的，$\omega_j (j=1,\cdots,n)$为柔性梁的各阶固有频率，$\delta\omega_j$ 和 ρ_j 为相应的带宽和权值. 由以上分析可见，对于柔性较大的机械臂，$\delta\omega_j$ 要取较大的值，以满足固有频率随位形的变化.

(4)上面求出的 $\tau(t)$一般不满足机械臂的刚体转动要求，设实际输入应为

$$\tau_1(t) = k\sum_{i=1}^{L} C_i Q_i(t) \tag{8-2-11}$$

将上式代入机械臂的运动方程，并略去残余的弹性振动，得

$$\int_0^T \left[\int_0^T \frac{k}{a_1}\sum_{i=1}^{L} C_i Q_i(t)dt\right]dt = \frac{\theta_m}{2} \tag{8-2-12}$$

由上式解出 k 值，代入(8-2-11)及(8-2-5)，即可求出要求的机械臂的低振动输入力矩.

当然也可将(8-2-11)代入非线性方程(8-2-2)或(8-2-3)以精确求解 k，由于开环控制是离线的，只是增加了计算量.

函数序列 $Q_i(t)(i=1,\cdots L)$的选择对逆动力学构造计算量及结果影响较大，这里给出几种常用形式($t\in[0,T]$)：

1°. 半周期正弦函数：

$$Q_i(t) = \sin\frac{i\pi}{T}(t - j\pi/i) \tag{8-2-13}$$

$$t \in \left[\frac{j}{i}T, \frac{j+1}{i}T\right] \qquad (i = 1,\cdots L, j = 0,\cdots, i-1)$$

2°. 正矢函数：

$$Q_i(t) = 1 - \cos\frac{2\pi i t}{T} \qquad (i = 1,\cdots L) \tag{8-2-14}$$

3°. 移位正交多项式，如移位的第一类切比雪夫(Chebyshev)多项式：

$$\left.\begin{aligned} &Q_1(t) = 1.0 \\ &Q_2(t) = 2t/T - 1.0 \\ &\cdots\cdots \\ &Q_{i+1}(t) = 2(2t/T - 1)Q_i(t) - Q_{i-1}(t) \end{aligned}\right\} \tag{8-2-15}$$

§2.3 构造实例

给定简单柔性机械臂的参数如下：

$l=1.5\text{m}$；$\rho=0.8\text{kg/m}$；$J=1.0\times10^{-10}\text{m}^4$；

$E=2.0\times10^{11}\text{N/m}^2$；$M_t=0.1\text{kg}$；$I_h=0.2\text{kg}\cdot\text{m}^2$

可求得柔性梁的前两阶固有频率如下：

$\omega_1=7.8125\text{s}^{-1}$　　$f_1=1.2434\text{Hz}$

$\omega_2=48.96\text{s}^{-1}$　　$f_2=7.79\text{Hz}$

要求机械臂由静止状态经 $t\in[0,2]$s，转动 $\theta_m=1.2$rad. 应用前述构造性逆动力学方法，采用移位的第一类切比雪夫多项式，取前 10 项拟合($L=10$)，并取 $n=2,\rho_1=5.0,\rho_2=1.0,\delta\omega_1=10\%,\omega_1=0.78s^{-1},\delta\omega_2=2.5\%,\omega_2=1.224s^{-1}$.

图 8-3 为所构造的 $t\in[0,1]s$ 的输入力矩；图 8-4 为整个输入力矩的功率谱；图 8-5 和图 8-6 分别是该力矩作用下机械臂的转角和末端弹性振动. 由这些结果可见，所构造的输入力矩满足了机械臂转动的点位要求，同时残存很小的弹性振动.

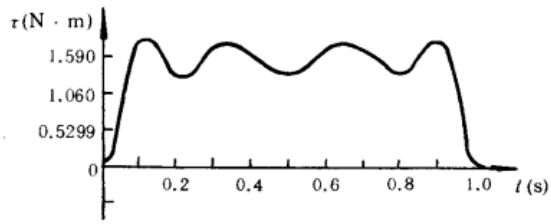


图 8-3 柔性机械臂的输入力矩

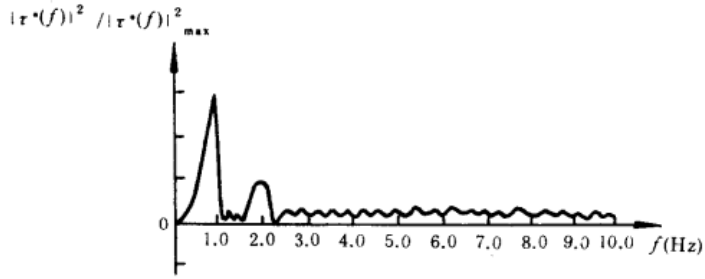


图 8-4 输入力矩的功率谱

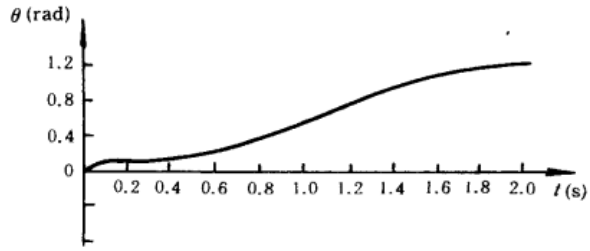


图 8-5 输入力矩作用下机械臂转角

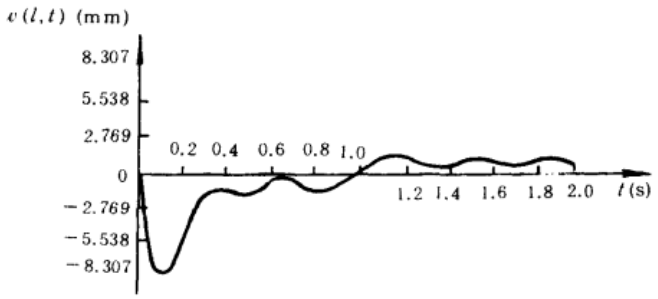


图 8－6　输入力矩作用下机械臂末端振动

§3. 柔性机械臂两点边值逆动力学方法

一般的带滑移/转动铰的柔性机械臂由若干个柔性杆（包括刚性）相联而成，相邻连杆间可以有最多三个相对转动自由度和三个相对滑动自由度，其几何构形如图 8－7 所示.

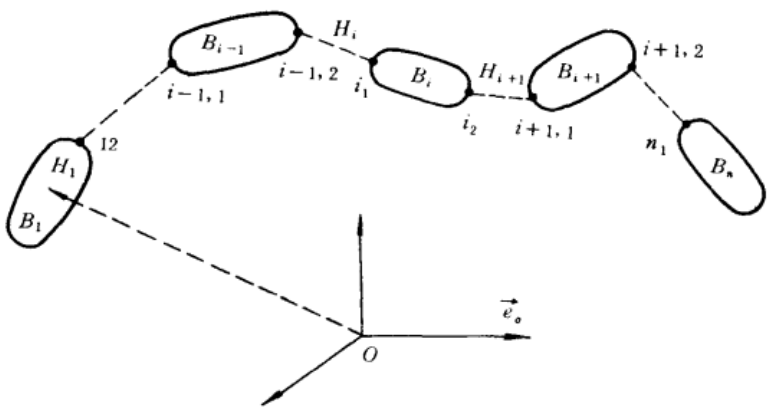


图 8－7　多体链系统的几何构形

从虚功形式的 d'Alembert 原理出发，推得图 8－7 所示的柔性机械臂的动力学方程如下[114]：

$$\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{X})\ddot{\underset{\sim}{X}}+\underset{\sim}{C}\dot{\underset{\sim}{X}}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{U}(t)+\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{X},\dot{\underset{\sim}{X}}) \qquad (8-3-1)$$

式中，　$\underset{\sim}{X}=[\underset{\sim}{d}^T,\underset{\sim}{\Phi}^T,\underset{\sim}{\xi}^T]$为系统的广义坐标列阵；

$\underset{\sim}{d}=[d_1^T,d_2^T,\cdots d_n^T]^T$ 为连杆间的相对滑移坐标列阵；

$\underset{\sim}{\Phi}=[\Phi_1^T,\Phi_2^T,\cdots\Phi_n^T]^T$ 为连杆间的相对转动坐标列阵；

$\underset{\sim}{\xi}=[\xi_1^T,\xi_2^T,\cdots\xi_n^T]^T$ 为连杆的弹性变形广义坐标列阵；

$\underset{\sim}{C}$为系统的阻尼系数阵；

$\underset{\sim}{K}$为系统的刚度系数阵；

$\underset{\sim}{M}$为系统的广义质量阵；

$\underset{\sim}{U}$为系统的广义力列阵；

$\underset{\sim}{D}=[\underset{\sim}{D}_d^T,\underset{\sim}{D}_\phi^T,\underset{\sim}{D}_\xi^T]^T$ 为刚柔耦合(离心力、柯氏力)非线性项.

由质量阵 $\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{X})$的正定性，易于将(8－3－1)化为非线性状态方程：

$$\dot{\underset{\sim}{Y}}=\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{Y},\underset{\sim}{U},t)=\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{Y})\underset{\sim}{Y}+\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{U},t)+\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{Y}) \tag{8-3-2}$$

其中，$\underset{\sim}{Y}=[\underset{\sim}{X}^T,\dot{\underset{\sim}{X}}^T]^T$ 为状态变量；

$$\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I}\\ -\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K} & -\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{C}\end{bmatrix}\qquad \underset{\sim}{u}=\begin{bmatrix}0\\ \underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{U}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{Y})=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{D}\end{bmatrix}$$

§3.1 两点边值逆动力学方法

在方程(8－3－2)中，很容易写出柔性机械臂的状态变量 Y：

$$\underset{\sim}{Y}=[d^T\quad \Phi^T\quad \xi^T\quad \dot{d}^T\quad \dot{\Phi}^T\quad \dot{\xi}^T]^T \tag{8-3-3}$$

柔性机械臂的运动控制和振动抑制往往是耦合在一起的. 由于存在结构柔性，刚体运动必激起弹性振动，要实现精确的点位运动必须同时消除弹性振动. 这一过程可描述为：控制机械臂的输入力(矩)，使机械臂在时间$[t_0,t_f]$内完成特定的刚体运动(各杆间一定的相对滑动和转动)并使在运动结束时弹性振动及其速度为零，在运动过程中尽可能抑制杆的弹性变形. 这一过程可以应用最优控制来完成. 在给定初始条件和机械臂精确数学模型的条件下，对这一过程的数值模拟可求出所需的开环输入，即逆动力学分析结果.

记机械臂的初始状态为

$$\underset{\sim}{Y}(t_o)=[\underset{\sim}{d}_0^T,\underset{\sim}{\Phi}_0^T,\underset{\sim}{\xi}_0^T,\dot{\underset{\sim}{d}}_0^T,\dot{\underset{\sim}{\Phi}}_0^T,\dot{\underset{\sim}{\xi}}_0^T]^T \tag{8-3-4}$$

运动结束时刻 t_f 的状态为

$$\underset{\sim}{Y}(t_f)=[\underset{\sim}{d}_f^T,\underset{\sim}{\Phi}_f^T,\underset{\sim}{0}^T,\dot{\underset{\sim}{d}}_f^T,\dot{\underset{\sim}{\Phi}}_f^T,\underset{\sim}{0}^T]^T \tag{8-3-5}$$

由于一般情况下要求机械臂在运动结束时处于静止状态，所以有

$$\left.\begin{aligned}\dot{d}_f^T&=0\\ \dot{\Phi}_f^T&=0\end{aligned}\right\} \tag{8-3-6}$$

运动或状态转移过程中控制的目标函数可记为

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\underset{\sim}{Y}^T\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Y}+\underset{\sim}{U}^T\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}]dt \tag{8-3-7}$$

式中，$\underset{\sim}{Q}$，$\underset{\sim}{R}$为加权阵，$\underset{\sim}{R}$为正定，$\underset{\sim}{Q}$为正定或半正定的对称阵，J 中的两项分别表示运动中的弹性变形和能耗.

为了改善控制的鲁棒性，$\underset{\sim}{Q}$常取为时变阵，以加强对接近运动结束时刻弹性变形的抑制，如可取：

$$\underset{\sim}{Q}=\underset{\sim}{Q}_0e^{a(t-t_0)} \tag{8-3-8}$$

式中，$\underset{\sim}{Q}_0$ 为正定或半正定常数阵，a 为正常数.

按极值原理，在时间$[t_0,t_f]$内，使机械臂状态由$\underset{\sim}{Y}(t_0)$转移到$\underset{\sim}{Y}(t_f)$，并使目标函数(8-3-7)取极小值的广义外力输入列阵及最优状态转移轨线由以下各式给出：

$$\underset{\sim}{U}^*(t)=-\underset{\sim}{R}^{-1}\underset{\sim}{\lambda}^T(t)\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{U}}\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{Y},\underset{\sim}{U},t)\Big|_{U=U^*} \tag{8-3-9}$$

$$\dot{\underset{\sim}{Y}}=\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{Y},\underset{\sim}{U}^*,t) \tag{8-3-10}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\lambda}}(t)=-\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{\lambda}^T(t)\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{Y}}\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{Y},\underset{\sim}{U}^*,t) \tag{8-3-11}$$

式中，$\lambda^T(t)=[\lambda_1(t)\cdots\lambda_N(t)]$为伴随向量函数；

由(8-3-2)和(8-3-1)可知(8-3-9)右端一般不再显含U，将(8-3-9)代入(8-3-10)，(8-3-11)，消去U，连同边值条件(8-3-4)，(8-3-5)构成了关于变量$Z=[Y^T\lambda^T(t)]^T$的非线性两点边值问题. 对此文献[86]改进了拟线性化方法，提出了增强收敛性和加快收敛速度的模型递推算法.

§3.2 轨迹追踪问题

柔性机械臂轨迹追踪问题，即确定机械臂的广义外力输入$\underset{\sim}{U}(t),t\in[t_0,t_f]$，使柔性机械臂跟踪优化轨迹$\underset{\sim}{d}_1(t),\underset{\sim}{\Phi}_1(t),t\in[t_0,t_f]$，同时有效地抑制或消除弹性振动.

将弹性变形作扰动量处理，同时定义如下扰动量：

$$\delta\underset{\sim}{d}=\underset{\sim}{d}(t)-\underset{\sim}{d}_1(t) \tag{8-3-12}$$

$$\delta\underset{\sim}{\Phi}=\underset{\sim}{\Phi}(t)-\underset{\sim}{\Phi}_1(t) \tag{8-3-13}$$

$$\delta\underset{\sim}{U}=\underset{\sim}{U}(t)-\underset{\sim}{U}_1(t) \tag{8-3-14}$$

式中，$\underset{\sim}{d}(t),\underset{\sim}{\Phi}(t)$为连杆间的实际相对移动和转动向量；$U(t)$为柔性机械臂实际广义外力输入；$U_1(t)$为广义输入列阵，即将柔性机械臂刚性化(弹性变形为零)，由$d_1(t),\Phi_1(t)$及初始条件得出的广义输入.

将(8-3-12)—(8-3-14)代入(8-3-1)可得到柔性机械臂的扰动状态方程如下：

$$\dot{\hat{\underset{\sim}{Y}}}=\hat{\underset{\sim}{F}}(\hat{\underset{\sim}{Y}},\delta\underset{\sim}{U},t) \tag{8-3-15}$$

式中，状态变量

$$\hat{\underset{\sim}{Y}}=[\delta\underset{\sim}{d}^T\quad\delta\underset{\sim}{\Phi}^T\quad\underset{\sim}{\xi}^T\quad\delta\dot{\underset{\sim}{d}}^T\quad\delta\dot{\underset{\sim}{\Phi}}^T\quad\dot{\underset{\sim}{\xi}}^T]^T \tag{8-3-16}$$

记初始状态为

$$\hat{\underset{\sim}{Y}}(t_0)=\hat{\underset{\sim}{Y}}_0 \tag{8-3-17}$$

而轨迹追踪的终点状态为

$$\hat{\underset{\sim}{Y}}(t_f)=[\underset{\sim}{Q}^T\quad\underset{\sim}{Q}^T\quad\underset{\sim}{Q}^T\quad\underset{\sim}{Q}^T\quad\underset{\sim}{Q}^T\quad\underset{\sim}{Q}^T]^T \tag{8-3-18}$$

目标函数为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}[\hat{\underset{\sim}{Y}}^T\hat{\underset{\sim}{Q}}\hat{\underset{\sim}{Y}}+\delta\underset{\sim}{U}^T\hat{\underset{\sim}{R}}\delta\underset{\sim}{U}]dt \tag{8-3-19}$$

式中，权阵$\hat{\underset{\sim}{Q}},\hat{\underset{\sim}{R}}$类似上述$\underset{\sim}{Q},\underset{\sim}{R}$.

$\hat{\underset{\sim}{Q}}$一方面限制机械臂的弹性振动，另一方面限制机械臂实际运动轨迹同跟踪轨迹的偏差，以实现轨迹追踪；$\bar{R}$限制抑制弹性振动所需的附加能量.

在时间$[t_0,t_f]$内，使机械臂状态由 $\hat{\underset{\sim}{Y}}_0$ 转移到 $\hat{\underset{\sim}{Y}}(t_f)$ 并使目标函数(8－3－19)取极小值的广义外力输入列阵对 $\underset{\sim}{U}_1(t)$ 的扰动 $\delta\underset{\sim}{U}^*$ 由下式给出：

$$\delta\underset{\sim}{U}^* = -\hat{\underset{\sim}{R}}^{-1}\hat{\underset{\sim}{\lambda}}^T(t)\frac{\partial}{\partial\delta\underset{\sim}{U}}\hat{\underset{\sim}{F}}(\hat{\underset{\sim}{Y}},\delta\underset{\sim}{U},t)|_{\delta U=\delta U^*} \tag{8-3-20}$$

$$\dot{\hat{\underset{\sim}{Y}}} = \hat{\underset{\sim}{F}}(\hat{\underset{\sim}{Y}},\delta\underset{\sim}{U},t) \tag{8-3-21}$$

$$\dot{\tilde{\underset{\sim}{\lambda}}}(t) = -\hat{\underset{\sim}{Q}}\hat{\underset{\sim}{Y}} - \hat{\underset{\sim}{\lambda}}^T(t)\frac{\partial}{\partial\hat{\underset{\sim}{Y}}}\hat{\underset{\sim}{F}}(\hat{\underset{\sim}{Y}},\delta\underset{\sim}{U}^*,t) \tag{8-3-22}$$

最后轨迹追踪的广义输入由下式给出：

$$\underset{\sim}{U}^*(t) = \underset{\sim}{U}_1(t) + \delta\underset{\sim}{U}^*(t) \tag{8-3-23}$$

式(8－3－20)—(8－3－22)的求解类似于(8－3－9)—(8－3－11).

§3.3 算例

为了证明本节所述方法的有效性，选如图 8－8 所示的带有一个滑移铰和一个转动铰的单连杆单面柔性机械臂作模拟算例.

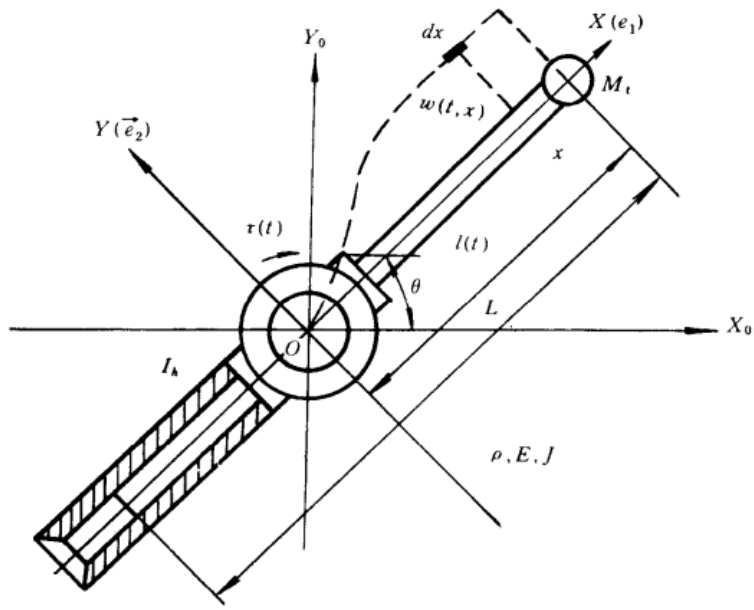


图 8－8 带滑移/转动铰的平面柔性机械臂

假定臂为一均匀等截面梁，截面尺寸远小于其长度，并可忽略剪切变形和转动效应，同时假定臂只在 $OX_0Y_0(OXY)$ 平面内变曲.

图中 OX_0Y_0 为惯性坐标系，OXY 为与机械臂固连的动坐标系，OX 轴同未变形的轴线相重合，由模态展开方法，弹性变形为

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i(t)\Phi_i(t,x) \tag{8-3-24}$$

式中，$\Phi_i(t,x)$为满足边界条件的梁的一组时变正交标准化振型系数，$i=1,\cdots\infty$；$\delta_i(t)$为对应的模态坐标.

当取两阶模态截断时，可求得机械臂的运动方程如下(略去结构阻尼)：

$$\begin{aligned}&[a_1(t)+a_2(t)\delta_1^2+a_3(t)\delta_1\delta_2+a_4(t)\delta_2^2]\ddot{\theta}+a_5(t)\ddot{\delta}_1+a_6(t)\ddot{\delta}_2\\&+a_7(t)\ddot{\theta}+a_8(t)\ddot{\delta}_1+a_9(t)\ddot{\delta}_2+a_{10}(t)\delta_1+a_{11}(t)\delta_2\\&+a_{12}(t)\dot{\theta}\,\delta_1\dot{\delta}_1+a_{13}(t)\dot{\theta}\,\delta_1\dot{\delta}_2+a_{14}(t)\dot{\theta}\,\delta_1\dot{\delta}_2\\&+a_{15}(t)\dot{\theta}\,\delta_2\dot{\delta}_2+a_{16}(t)\dot{\theta}\,\delta_1^2+a_{17}(t)\dot{\theta}\,\delta_1\delta_2+a_{18}(t)\dot{\theta}\,\delta_2^2\\&=\tau(t)\end{aligned} \tag{8-3-25}$$

$$\begin{aligned}&b_1(t)\ddot{\theta}+b_2(t)\ddot{\delta}_1+b_3(t)\ddot{\delta}_2+b_4(t)\dot{\theta}+b_5(t)\dot{\delta}_1+b_6(t)\dot{\delta}_2\\&+b_7(t)\delta_1+b_8(t)\delta_2+b_9(t)\dot{\theta}^2\delta_1+b_{10}(t)\dot{\theta}^2\delta_2=0\end{aligned} \tag{8-3-26}$$

$$\begin{aligned}&c_1(t)\ddot{\theta}+c_2(t)\ddot{\delta}_1+c_3(t)\ddot{\delta}_2+c_4(t)\dot{\theta}+c_5(t)\dot{\delta}_1+c_6(t)\dot{\delta}_2\\&+c_7(t)\delta_1+c_8(t)\delta_2+c_9(t)\dot{\theta}^2\delta_1+c_{10}(t)\dot{\theta}^2\delta_2=0\end{aligned} \tag{8-3-27}$$

以上各式的推导及各时变系数$a_1(t)\cdots c_{10}(t)$的算式详见文献[86].

给定机械臂参数如下：

臂的线密度　　$\rho=2.0\text{kg/m}$；

截面惯性矩　　$J=5.0\times10^{-10}\text{m}^4$；

除滑杆外对转轴的转动惯量　　$I_h=0.5\text{kgm}^2$；

材料弹性模量　　$E=2.0\times10^{11}\text{N/m}^2$；

末端集中质量　　$M_t=0.1\text{kg}$

设滑动臂总长$L=8.0\text{m}$，滑移铰牵连运动：$L(t)=4.0-0.2t(\text{m})$，要求机械臂在$t\in[0,5]$秒内跟踪优化轨线$\theta_1(t)$：

$$\theta_1(t)=\frac{1}{25}t^2\,\text{rad}\qquad t\in[0,2.5]\text{s}$$

$$\theta_1(t)=0.25+\frac{1}{5}(t-2.5)-\frac{1}{25}(t-2.5)^2\,\text{rad}\quad t\in[2.5,5]\text{s}$$

权阵选取如下：

$$Q_0=\text{diag}(5.0\quad 10.0\quad 10.0\quad 5.0\quad 5.0\quad 5.0)\quad a=1.0,R=10$$

应用前述轨迹追踪算法求转动力矩，结果示于图8-9(a)—(f).

§4. 柔性机械臂点位运动控制的轨迹规划[88,89]

点位运动是指在一定的时间内使机械臂爪端从一个位置到另一个位置的运动. 显然，柔性机械臂只有在既保证了铰关节的准确定位，又有效地抑制了臂结构相对弹性振动时，才能实现点位运动. 本节将介绍一种时域上的逆动力学分析方法，它能使多关节、多柔性连杆机械臂实现较准确的点位运动.

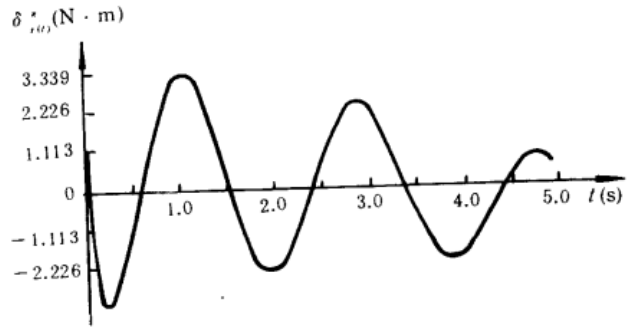


图 8－9(a)　最优扰动力矩 $\delta^*\tau(t)$

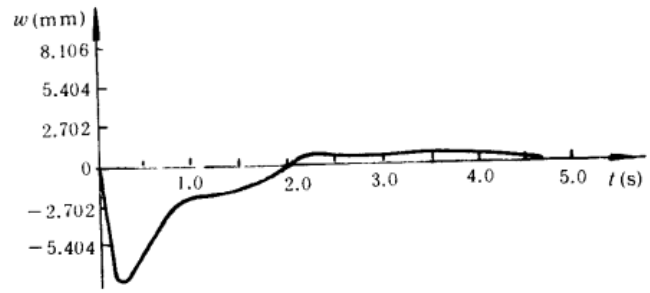


图 8－9(b)　末端振动曲线

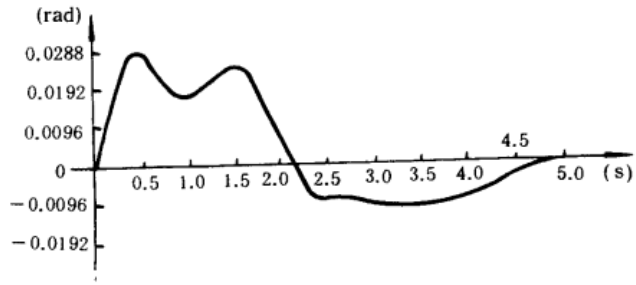


图 8－9(c)　转角扰动曲线

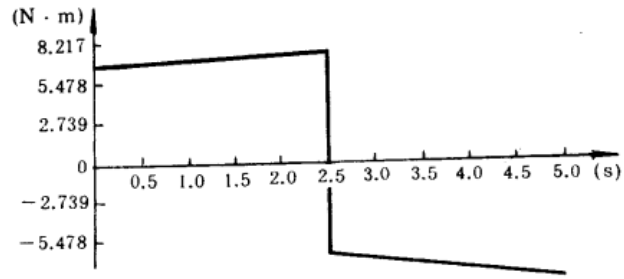


图 8－9(d)　名义力矩 $\tau_1(t)$

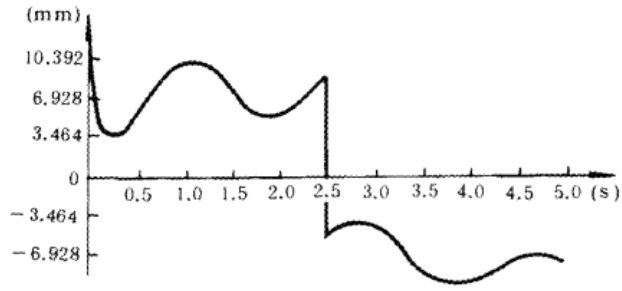


图 8-9(e)　总输入力矩

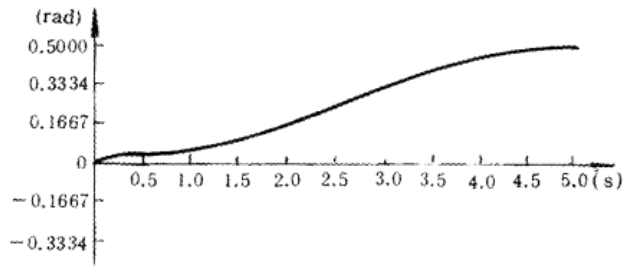


图 8-9(f)　总转角曲线

§4.1　铰关节的运动学分析

为使具有 n 个铰关节和 m 个柔性连杆($m \leqslant n$)的机械臂实现点位运动，要求机械臂的每一个铰关节都能在指定的时间 T 内，完成由初始位置到终止位置的运动，因此第 i 个铰关节的运动轨迹应满足下面的几组边值条件.

$$\begin{cases}\theta_i(0)=\theta_{i0}\\ \theta_i(T)=\theta_{iT}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dot{\theta}_i(0)=0\\ \dot{\theta}_i(T)=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\ddot{\theta}_i(0)=0\\ \ddot{\theta}_i(T)=0\end{cases}\tag{8-4-1}$$

定义函数集合 F

$$F=\{f_{ij}(t)\in C^{\infty}[0,T];\quad i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n$$
$$\dot{f}_{ij}(0)=\dot{f}_{ij}(T);\quad \ddot{f}_{ij}(0)=\ddot{f}_{ij}(T)=0\}$$

其中的每个元素可作为构成铰关节运动轨迹的基函数，并有

$$\ddot{\theta}_i(t)=\sum_{j=1}^{n_i}a_{ij}\ddot{f}_{ij}(t)\tag{8-4-2}$$

式中 a_{ij} 是待定的实系数，将(8-4-2)式对时间积分，可得

$$\dot{\theta}_i(t)=\sum_{j=1}^{n_i}a_{ij}\dot{f}_{ij}(t)+C_{i1}\tag{8-4-3}$$

$$\theta_i(t) = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} f_{ij}(t) + C_{i1} t + C_{i2} \qquad (8-4-4)$$

其中

$$C_{i1} = -\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \dot{f}_{ij}(0) \qquad C_{i2} = \theta_{i0} - \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} f_{ij}(0)$$

若再令待定系数 a_{ij} 满足等式约束

$$\theta_{iT} - \theta_{i0} = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} [f_{ij}(T) - f_{ij}(0) - \dot{f}_{ij}(0) T] \qquad (8-4-5)$$

则由(8-4-2)—(8-4-4)式确定的铰关节运动轨迹可满足(8-4-1)式中的所有边值条件，因而可由它们组成铰关节点位运动的可取轨迹族.

§4.2 点位运动控制的逆动力学方法

柔性机械臂动力学方程的矩阵形式可写作

$$\underset{\sim}{m}_{\theta}(\underset{\sim}{\theta}, \underset{\sim}{\eta}) \ddot{\underset{\sim}{\theta}} + \underset{\sim}{m}_{\theta\eta}(\underset{\sim}{\theta}, \underset{\sim}{\eta}) \ddot{\underset{\sim}{\eta}} + \underset{\sim}{g}_{\theta}(\underset{\sim}{\theta}, \dot{\underset{\sim}{\theta}}, \underset{\sim}{\eta}, \dot{\underset{\sim}{\eta}}) = \underset{\sim}{u}(t) \qquad (8-4-6)$$

$$\underset{\sim}{m}_{\theta\eta}^{T}(\underset{\sim}{\theta}, \underset{\sim}{\eta}) \ddot{\underset{\sim}{\theta}} + \underset{\sim}{m}_{\eta}(\underset{\sim}{\theta}, \underset{\sim}{\eta}) \ddot{\underset{\sim}{\eta}} + \underset{\sim}{C} \dot{\underset{\sim}{\eta}} + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\eta} + \underset{\sim}{g}_{\eta}(\underset{\sim}{\theta}, \dot{\underset{\sim}{\theta}}, \underset{\sim}{\eta}, \dot{\underset{\sim}{\eta}}) = 0 \qquad (8-4-7)$$

式中

$$\underset{\sim}{u} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}^T, \underset{\sim}{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}^T, \underset{\sim}{\eta} = \{\underset{\sim}{\eta}_1^T, \underset{\sim}{\eta}_2^T, \cdots, \underset{\sim}{\eta}_m^T\}^T$$

$$\underset{\sim}{\eta}_i = \{\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{imj}\}^T \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

其中 $\underset{\sim}{u}$ 为铰关节的控制输入向量，$\underset{\sim}{\theta}$ 为铰关节的运动变量，$\underset{\sim}{\eta}_i$ 为描述第 i 个柔性连杆相对弹性振动的模态坐标.

点位控制的逆动力学方法是要使设计出的开环控制力矩一方面能保证铰关节的定位精度，另一方面又能控制因整体运动激起的柔性连杆相对弹性振动. 可以看出，只要待定系数满足等式(8-4-5)，由(8-4-2)—(8-4-4)式给出的运动轨迹就能实现铰关节的定位，而为控制柔性连杆的弹性振动可选取与其弹性变形有关的二次型形式的性能指标

$$J(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}) = \frac{1}{2} \int_0^T [\underset{\sim}{\eta}^T \underset{\sim}{W}_1(t) \underset{\sim}{\eta} + \dot{\underset{\sim}{\eta}}^T \underset{\sim}{W}_2(t) \dot{\underset{\sim}{\eta}}] dt \qquad (8-4-8)$$

作为求解待定系数 a_{ij} 时用于优化的目标函数，其中 $\underset{\sim}{W}_1(t)$ 和 $\underset{\sim}{W}_2(t)$ 为时变加权矩阵.

若采用由柔性连杆的广义刚度和广义质量组成的对角矩阵作为加权矩阵，则由(8-4-8)式给出的性能指标的物理意义是柔性臂结构在运动过程中总的弹性变形能.

由于在控制柔性机械臂点位运动时，主要关心的是抑制臂结构在运动终止位置处的弹性振动，因此可采用指数因子 $W(t)$ 修正前述加权矩阵

$$W(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T - \delta \\ e^{\gamma(t+\delta-T)} & T - \delta \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

其中 $\gamma > 0, 0 \leqslant \delta \leqslant T$.

至此逆动力学分析工作就可归结为对下述非线性规划问题的求解.

$$\min J(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}) = \frac{1}{2} \int_0^T [\underset{\sim}{\eta}^T W(t) \underset{\sim}{W}_1(t) \underset{\sim}{\eta} + \dot{\underset{\sim}{\eta}}^T W(t) \underset{\sim}{W}_2(t) \dot{\underset{\sim}{\eta}}] dt$$

等式约束为

$$\theta_{iT}-\theta_{i0}=\sum_{j=1}^{n_i}a_{ij}[f_{ij}(T)-f_{ij}(0)-\dot{f}_{ij}(0)T]\quad i=1,2,\cdots,n \tag{8-4-9}$$

通过引入 Lagrange 乘子 λ_i 处理等式约束，非线性规划问题(8-4-9)可转化为下面的极值问题

$$\begin{aligned}&\min J_\lambda(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn_n},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\&=\frac{1}{2}\int_0^T[\eta^TW(t)W_1(t)\eta+\dot{\eta}^TW(t)W_2(t)\dot{\eta}]dt+\sum_{j=1}^{n_i}\lambda_i\{\theta_{iT}-\theta_{i0}\\&\quad-\sum_{j=1}^{n_i}a_{ij}[f_{ij}(T)-f_{ij}(0)-\dot{f}_{ij}(0)T]\}\end{aligned} \tag{8-4-10}$$

一旦得到了待定系数 a_{ij} 的最优解，也就确定了铰关节的运动轨迹，再求解方程(8-4-7)，可由方程(8-4-6)给出作用于铰关节的开环控制力矩. 若以此作为控制输入，将能实现柔性机械臂的点位运动. 相应地，由(8-4-2)—(8-4-4)式描述的铰关节运动轨迹可被称为柔性机械臂点位运动的最优运动轨迹.

§4.3 铰关节最优和次优运动轨迹

在多关节、多柔性连杆机械臂中，存在刚柔运动之间的非线性强耦合作用，难于得到模态坐标的封闭解，这必然会增加求解非线性规划问题的难度. 由于因铰关节运动而作用于柔性连杆的外激励成份十分复杂，为避免激发起臂结构的共振，可首先考虑进行铰关节运动轨迹的灵敏度分析.

定义与系数 a_{ij} 对应的轨迹灵敏度系数 S_{ij}

$$S_{ij}=\left|\frac{e_{ij}a_{ij}}{J_\lambda}\right|\quad i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n \tag{8-4-11}$$

式中

$$\begin{aligned}e_{ij}=&\int_0^T\left[W(t)\underset{\sim}{W}_1(t)\frac{\partial\eta}{\partial a_{ij}}+W(t)\underset{\sim}{W}_2(t)\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial a_{ij}}\right]dt\\&-\lambda_i[f_{ij}(T)-f_{ij}(0)-\dot{f}_{ij}(0)T]\end{aligned}$$

求方程(8-4-7)关于待定系数 a_{ij} 的偏导数，可得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial\underset{\sim}{m}_{\theta\eta}^T(\underset{\sim}{\theta},\eta)}{\partial\underset{\sim}{\theta}}\frac{\partial\underset{\sim}{\theta}}{\partial a_{ij}}+\frac{\partial\underset{\sim}{m}_{\theta\eta}^T(\underset{\sim}{\theta},\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial a_{ij}}\right]\ddot{\underset{\sim}{\theta}}+\underset{\sim}{m}_{\theta\eta}^T(\underset{\sim}{\theta},\eta)\frac{\partial\ddot{\underset{\sim}{\theta}}}{\partial a_{ij}}\\&+\left[\frac{\partial\underset{\sim}{m}_\eta(\underset{\sim}{\theta},\eta)}{\partial\underset{\sim}{\theta}}\frac{\partial\underset{\sim}{\theta}}{\partial a_{ij}}+\frac{\partial\underset{\sim}{m}_\eta(\underset{\sim}{\theta},\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial a_{ij}}\right]\ddot{\eta}+\underset{\sim}{m}_\eta(\underset{\sim}{\theta},\eta)\frac{\partial\ddot{\eta}}{\partial a_{ij}}\\&+\underset{\sim}{C}\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial a_{ij}}+\underset{\sim}{K}\frac{\partial\eta}{\partial a_{ij}}+\frac{\partial\underset{\sim}{g}_\eta}{\partial\underset{\sim}{\theta}}\frac{\partial\underset{\sim}{\theta}}{\partial a_{ij}}+\frac{\partial\underset{\sim}{g}_\eta}{\partial\underset{\sim}{\theta}}\frac{\partial\dot{\underset{\sim}{\theta}}}{\partial a_{ij}}+\frac{\partial\underset{\sim}{g}_\eta}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial a_{ij}}+\frac{\partial\underset{\sim}{g}_\eta}{\partial\dot{\eta}}\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial a_{ij}}=0\end{aligned} \tag{8-4-12}$$

联立求解方程(8-4-7)和(8-4-12)，将能确定由(8-4-11)式定义的轨迹灵敏度系数. 但应当承认计算轨迹灵敏度系数的工作量是十分巨大的，为避开这个困难，也可采用差商形式近似地表示轨迹的灵敏度系数，

$$S_{ij}=\left|\frac{J_\lambda(a_{11},\cdots,a_{ij}+\Delta a_{ij},\cdots,a_{nn_n})-J_\lambda(a_{11},\cdots,a_{ij},\cdots,a_{nn_n})}{J_\lambda(a_{11},\cdots,a_{ij},\cdots,a_{nn_n})}\right|\Big/\frac{\Delta a_{ij}}{a_{ij}}$$

将轨迹灵敏度系数按由大到小的顺序排序，其值较大者就意味着所对应的运动轨迹对目标值的影响较大，也就是说可能引起柔性连杆较大幅度的相对弹性振动，而不利于实现柔性机械臂的点位运动. 因之假如从铰关节运动轨迹中剔除较大轨迹灵敏度系数所对应的成分，将会有助于控制臂结构的弹性振动. 对应的铰关节运动轨迹在一定程度上可看作是次优的. 若再在次优的运动轨迹中寻求最优的运动轨迹，显然会降低非线性规划问题的求解规模.

利用轨迹灵敏度的计算结果，可以确定极值问题(8－4－10)的最速下降方向，进而将多维空间的寻优问题转化为一维空间的优化问题.

对于简单柔性机械臂，在弹性小变形假设下，根据方程(8－4－7)可直接得到模态坐标的封闭解，将解的一般形式记为

$$\underset{\sim}{\eta}_1=[\underset{\sim}{g}_1(t)]\underset{\sim}{a}_1\qquad \underset{\sim}{g}_1(t)\in R^{m_1\times n_1}\qquad \underset{\sim}{a}_1\in R^{n1}$$

则目标函数 J_λ 可表示为待定系数的二次代数多项式

$$J_\lambda(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},\lambda_1)$$
$$=\underset{\sim}{a}_1^T\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{a}_1+\lambda_1\Big\{\theta_{1T}-\theta_{10}-\sum_{j=1}^{n1}a_{ij}[f_{ij}(T)-f_{ij}(0)-\dot f_{ij}(0)T]\Big\}$$

式中

$$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{2}\int_0^T\{[\underset{\sim}{g}_1(t)]^TW(t)\underset{\sim}{W}_1(t)[\underset{\sim}{g}_1(t)]+[\dot{\underset{\sim}{g}}_1(t)]^TW(t)\underset{\sim}{W}_2(t)[\dot{\underset{\sim}{g}}_1(t)]\}dt$$

此时非线性规划问题的最优解即为下述线性代数方程组的解

$$\frac{\partial J_\lambda}{\partial\lambda}=0\qquad \frac{\partial J_\lambda}{\partial a_{ij}}=0\qquad j=1,2,\cdots,n$$

由此给出的铰关节运动轨迹就是简单柔性机械臂点位运动的最优运动轨迹.

§5. 柔性机械臂轨迹追踪控制的递推逆动力学方法

爪端的轨迹追踪运动是机械臂的另一种重要的运动形式. 对于柔性机械臂而言，由于铰关节整体运动激起的臂结构相对弹性振动几乎是确定性的，因而有必要在考虑弹性变形对运动轨迹影响的情况下，进行轨迹追踪控制的逆动力学分析. 本节通过引入“拟刚性机械臂”描述预定的被追踪轨迹，建立了柔性机械臂的运动学递推关系和递推的动力学方程. 在此基础上，提出了实现柔性机械臂爪端轨迹追踪的、具有递推形式的逆动力学方法.

§5.1 柔性机械臂的运动学描述

柔性机械臂中任意相邻连杆的几何构形如图 8－10 所示，$\underset{\sim}{e}_0$ 代表惯性参考系，$\underset{\sim}{e}_i$ 为“拟刚性机械臂”第 i 个连杆的连体坐标系，它相对于 $\underset{\sim}{e}_0$ 的角速度为 $\vec{\omega}_i$，$\underset{\sim}{e}_i$ 与 $\underset{\sim}{e}_0$ 之间的坐标变换矩阵为 $\underset{\sim}{A}_{0i}$. 连接相邻铰的曲线代表柔性机械臂，直线则为“拟刚性机械臂”，θ_i 和 $\bar\theta_i$ 分别为柔性机械臂和“拟刚性机械臂”在 H_i 铰处的相对转角，其中 $\bar\theta_i$ 可由刚性机械臂的逆运动学分析过程确定. $\bar r_i$ 为 H_i 铰在 $\underset{\sim}{e}_0$ 下的矢径，$\vec r_{ip}$ 为柔性机械臂第 i 个连杆上任意一点 P

在 $\underset{\sim}{e}_0$ 下的矢径，$\vec{x}_{iP}$ 为变形前 P 点的位矢，$\vec{\delta}_{iP}$ 为 P 点的相对弹性变形. 设 u_i 为作用于铰 H_i 处的控制力矩，若通过设计 u_i 确保柔性机械臂的铰关节与“拟刚性机械臂”的铰关节在运动过程中完全重合，就可以实现柔性机械臂的轨迹追踪.

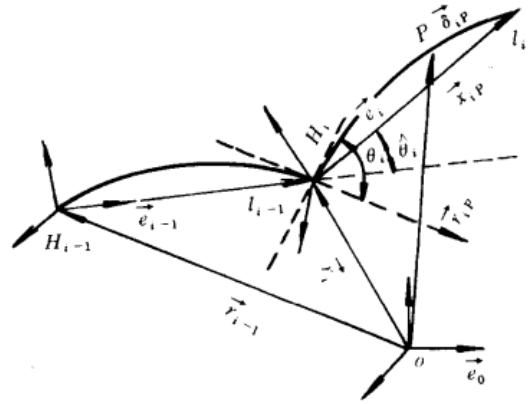


图 8－10　两个相邻关节的几何构形

§5.2　相邻连杆的运动学关系

根据图(8－10)可以建立下述矢量关系

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \vec{l}_{i-1} \tag{8-5-1}$$

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} - \vec{\Omega}_i \tag{8-5-2}$$

$$\vec{r}_{iP} = \vec{r}_i + \vec{x}_{iP} + \vec{\delta}_{iP} \tag{8-5-3}$$

以及坐标系 $\underset{\sim}{e}_i$ 与 $\underset{\sim}{e}_{i-1}$ 之间的变换关系

$$\underset{\sim}{e}_{i-1}^T = \underset{\sim}{e}_i^T \underset{\sim}{G}_i(\bar{\theta}_i) \tag{8-5-4}$$

式中

$$\vec{r}_i = \underset{\sim}{e}_0^T \underset{\sim}{r}_i \qquad \vec{r}_{iP} = \underset{\sim}{e}_0^T \underset{\sim}{r}_{iP} \qquad \vec{l}_i = \underset{\sim}{e}_i^T \underset{\sim}{l}_i \qquad \vec{x}_{iP} = \underset{\sim}{e}_i^T \underset{\sim}{x}_{iP}$$

$$\vec{\delta}_{iP} = \underset{\sim}{e}_i^T \underset{\sim}{\psi}_{iP} q_i \qquad \vec{\omega}_i = \underset{\sim}{e}_i^T \underset{\sim}{\omega}_i \qquad \vec{\Omega}_i = \underset{\sim}{e}_i^T \underset{\sim}{H}_i(\theta_i)\dot{\theta}_i$$

其中 $\underset{\sim}{H}_i(\bar{\theta}_i)$ 和 $\underset{\sim}{G}_i(\bar{\theta}_i)$ 的具体形式取决于 H_i 铰的类型；$\underset{\sim}{\psi}_{iP}$ 为第 i 个连杆上任意一点 P 的平移变形模态矩阵，q_i 为与之对应的模态坐标. 为了实现轨迹追踪，应要求

$$\underset{\sim}{\psi}_{i1} = \underset{\sim}{\psi}_{i2} = 0 \tag{8-5-5}$$

其中 $\underset{\sim}{\psi}_{i1}$ 和 $\underset{\sim}{\psi}_{i2}$ 分别为第 i 个连杆内外铰点的模态值.

显然以铰关节为支点的简支梁振动模态 $\varphi_i(x)$ 就可满足(8－5－5)式，但在一般情况下，人们更多采用的是悬臂梁模态 $\bar{\varphi}_i(x)$，这里通过作近似变换选取

$$\bar{\varphi}_i^*(x) = \bar{\varphi}_i(x) - x\bar{\varphi}_i(x)/l$$

作为满足(8－5－5)式的模态函数.

从(8－5－4)式还能得到坐标变换矩阵的递推关系

$$\underset{\sim}{A}_{0i} = \underset{\sim}{A}_{0,i-1}\underset{\sim}{G}_i(\bar{\theta}_i) \tag{8-5-6}$$

根据(8-5-1)和(8-5-2)式，可建立运动学递推关系

$$\ddot{\underset{\sim}{r}}_i = \ddot{\underset{\sim}{r}}_{i-1} - \underset{\sim}{A}_{0i}\tilde{\underset{\sim}{l}}_i\underset{\sim}{A}_{i0}\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1} + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1}\underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{l}_{i-1} \tag{8-5-7}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}}_i = \dot{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1} + \underset{\sim}{A}_{0i}\dot{\underset{\sim}{H}}_i(\bar{\theta}_i)\ddot{\underset{\sim}{\theta}}_i + \underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{H}_i(\bar{\theta}_i)\ddot{\underset{\sim}{\theta}}_i + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1}\underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{H}_i(\bar{\theta}_i)\dot{\underset{\sim}{\theta}}_i \tag{8-5-8}$$

$$\delta\underset{\sim}{r}_i = \delta\underset{\sim}{r}_{i-1} - \underset{\sim}{A}_{0i}\tilde{\underset{\sim}{l}}_{i-1}\underset{\sim}{A}_{i0}\delta\underset{\sim}{\beta}_{i-1} \tag{8-5-9}$$

$$\delta\underset{\sim}{\beta}_i = \delta\underset{\sim}{\beta}_{i-1} + \underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{H}_i(\bar{\theta}_i)\delta\bar{\underset{\sim}{\theta}}_i \tag{8-5-10}$$

式中 $\delta\beta_i$ 是与 ω_i 相应的转角的变分.

分析 H_i 铰处的运动学关系，还可建立变分关系

$$\delta\bar{\underset{\sim}{\theta}}_i = \delta\bar{\underset{\sim}{\theta}}_i + \underset{\sim}{\varphi}_{i-1,2}\delta\underset{\sim}{q}_{i-1} + \underset{\sim}{\varphi}_{i1}\delta\underset{\sim}{q}_i \tag{8-5-11}$$

式中 $\varphi_{i-1,2}$ 和 φ_{i1} 分别为第 $i-1$ 连杆和第 i 连杆在 H_i 铰处的旋转变形模态矩阵.

若将(8-5-7)—(8-5-11)式表示为矩阵形式，可得

$$\dot{\underset{\sim}{Y}}_i = \underset{\sim}{T}_{i-1}\dot{\underset{\sim}{Y}}_{i-1} + \underset{\sim}{P}_i\dot{\underset{\sim}{V}}_i + \underset{\sim}{S}_{i-1} \tag{8-5-12}$$

$$\delta\underset{\sim}{y}_i = \underset{\sim}{T}_{i-1}\delta\underset{\sim}{y}_{i-1} + \underset{\sim}{P}_i\delta\underset{\sim}{V}_i \tag{8-5-13}$$

$$\delta\underset{\sim}{\theta}_i = \underset{\sim}{D}_{i-1}\delta\underset{\sim}{y}_{i-1} + \underset{\sim}{F}_i\delta\underset{\sim}{V}_i \tag{8-5-14}$$

$$\underset{\sim}{T}_{i-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & -\underset{\sim}{A}_{0i}\tilde{\underset{\sim}{l}}_{i-1}\underset{\sim}{A}_{i0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{P}_i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{H}_i(\bar{\theta}_i) & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{S}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1}\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1}\underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{l}_{i-1} \\ \underset{\sim}{A}_{0i}\dot{\underset{\sim}{H}}_i(\bar{\theta}_i)\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}_i + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_{i-1}\underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{H}_i(\bar{\underset{\sim}{\theta}}_i)\dot{\bar{\underset{\sim}{\theta}}}_i \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{F}_i = \{\underset{\sim}{I} \quad \underset{\sim}{\varphi}_{i1}\}$$

$$\underset{\sim}{D}_{i-1} = \{0, 0, \underset{\sim}{\varphi}_{i-1,2}\}$$

$$\underset{\sim}{Y}_i = \{\dot{\underset{\sim}{r}}_i^T, \underset{\sim}{\omega}_i^T, \dot{\underset{\sim}{q}}_i^T\}^T \qquad \delta\underset{\sim}{y}_i = \{\delta\underset{\sim}{r}_i^T, \delta\underset{\sim}{\beta}_i^T, \delta\underset{\sim}{q}_i^T\}^T$$

$$\underset{\sim}{V}_i = \{\bar{\underset{\sim}{\theta}}_i^T, \underset{\sim}{q}_i^T\}^T \qquad \delta\underset{\sim}{V}_i = \{\delta\bar{\underset{\sim}{\theta}}_i^T, \delta\underset{\sim}{q}_i^T\}^T$$

§5.3 柔性连杆变分形式的动力学方程

由(8-5-13)式，还可得到 p 点的加速度及变分表达式

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{ip} = \underset{\sim}{e}_0^T[&\ddot{\underset{\sim}{r}}_i + \underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{\psi}_{ip}\ddot{\underset{\sim}{q}}_i + 2\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_i\underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{\psi}_{ip}\dot{\underset{\sim}{q}}_i \\ &- \underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{x}_{ip}\underset{\sim}{A}_{i0}\dot{\underset{\sim}{\omega}}_i + \tilde{\underset{\sim}{\omega}}_i\tilde{\underset{\sim}{\omega}}_i\underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{x}_{ip}] \end{aligned} \tag{8-5-15}$$

$$\delta\vec{r}_{ip} = \underset{\sim}{e}_0^T[\delta\underset{\sim}{r}_i + \underset{\sim}{A}_{0i}\underset{\sim}{\psi}_{ip}\delta\underset{\sim}{q}_i - \underset{\sim}{A}_{0i}\tilde{\underset{\sim}{x}}_{ip}\underset{\sim}{A}_{i0}\delta\underset{\sim}{\beta}_i] \tag{8-5-16}$$

式中 $\vec{x}_{ip} = \vec{x}_{ip} + \vec{\delta}_{ip}$.

将虚功形式的 d'Alembert 原理应用于第 i 个柔性连杆，可得连杆变分形式的动力学方程

$$-\int_0^{l_i}\rho_i\delta\vec{r}_{ip}^T\cdot\ddot{\vec{r}}_{ip}dx_{ip} - \delta\underset{\sim}{q}_i^T\underset{\sim}{K}_i\underset{\sim}{q}_i = \delta\bar{\underset{\sim}{\theta}}_i^T\underset{\sim}{u}_i + \int_0^{l_i}\delta\vec{r}_{ip}^T\cdot\vec{f}_{ip}dx_{ip} \tag{8-5-17}$$

式中 l_i 为第 i 个连杆未变形时的长度，ρ_i 为第 i 个连杆单位长度质量，K_i 为第 i 个连杆的刚度矩阵，$\vec{f}_{ip}$ 为作用于第 i 个连杆 p 点的分布体力，在 e_0 下描述.

将(8-5-15)和(8-5-16)式代入到方程(8-5-17)中，可将动力学方程的具体形式写作

$$\delta Y_i^T(M_i\dot{Y}_i + Q_i) - \delta\theta_i^T u_i = 0 \tag{8-5-18}$$

式中

$$M_i = \begin{bmatrix} \int_0^{l_i}\rho_i dx_{ip} I & -A_{0i}\int_0^{l_i}\rho_i \tilde{x}_{ip}dx_{ip}A_{i0} & A_{0i}\int_0^{l_i}\rho_i\psi_{ip}dx_{ip} \\ (-A_{0i}\int_0^{l_i}\rho_i\tilde{x}_{ip}dx_{ip}A_{i0})^T - & A_{0i}\int_0^{l_i}\rho_i\tilde{x}_{ip}\tilde{x}_{ip}dx_{ip}A_{i0} & A_{0i}\int_0^{l_i}\rho_i\tilde{x}_{ip}\psi_{ip}dx_{ip} \\ (A_{0i}\int_0^{l_i}\rho_i\varphi_{ip}dx_{ip})^T & A_{0i}\int_0^{l_i}\rho_i\tilde{x}_{ip}\psi_{ip}dx_{ip} & \int_0^{l_i}\rho_i\psi_{ip}^T\psi_{ip}dx_{ip} \end{bmatrix}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 2\tilde{\omega}_i A_{0i}\int_0^{l_i}\rho_i\psi_{ip}dx_{ip}\dot{q}_i + \tilde{\omega}_i\tilde{\omega}_i A_{0i}\int_0^{l_i}\rho_i x_{ip}dx_{ip} + \int_0^{l_i} f_{ip}dx_{ip} \\ 2A_{0i}\int_0^{l_i}\rho_i\tilde{x}_{ip}A_{i0}\tilde{\omega}_i A_{0i}\psi_{ip}dx_{ip}\dot{q}_i + A_{0i}\int_0^{l_i}\tilde{x}_{ip}A_{i0}\tilde{\omega}_i\tilde{\omega}_i A_{0i}x_{ip}dx_{ip} \\ \quad + A_{0i}\int_0^{l_i}\rho_i\tilde{x}_{ip}A_{i0}f_{ip}dx_{ip} \\ 2\int_0^{l_i}\rho_i\psi_{ip}^T\tilde{\omega}_i A_{0i}\psi_{ip}^T dx_{ip}\dot{q}_i + \int_0^{l_i}\psi_{ip}^T A_{i0}\tilde{\omega}_i\tilde{\omega}_i A_{0i}x_{ip}dx_{ip} \\ \quad + \int_0^{l_i}\psi_{ip}^T A_{i0}f_{ip}dx_{ip} + K_i q_i \end{bmatrix}$$

§5.4 柔性机械臂的逆动力学分析

从方程(8-5-18)出发，可得由 n 个连杆组成的柔性机械臂动力学方程

$$\sum_{i=1}^{n}[\delta Y_i^T(M_i\dot{Y}_i + Q_i) - \delta\theta_i^T u_i] = 0 \tag{8-5-19}$$

根据(8-5-19)式，我们就可以给出柔性机械臂逆动力学分析的具体步骤：

(1)对于柔性机械臂的末端连杆，即第 n 个连杆，将(8-5-12)，(8-5-13)和(8-5-14)式代入到方程(8-5-19)中，可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}[\delta Y_i^T(M_i\dot{Y}_i + Q_i) - \delta\theta_i^T u_i] &+ \delta Y_{n-1}^T[(M_{n-1} + T_{n-1}^T M_n T_{n-1})\dot{Y}_{n-1} \\ &+ Q_{n-1} + T_{n-1}^T M_n P_n \ddot{V}_n + T_{n-1}^T M_n S_{n-1} + T_{n-1}^T Q_n - D_{n-1}^T u_n] \\ &+ \delta\theta_{n-1}^T u_{n-1} + \delta V_n^T[P_n^T M_n T_{n-1}\dot{Y}_{n-1} + P_n^T\ddot{V}_n + P_n^T M_n S_{n-1} + P_n^T Q_n - F_n^T u_n] \\ &= 0\end{aligned} \tag{8-5-20}$$

由于 δV_n 为运动独立的变分，因而可得

$$P_n^T M_n T_{n-1}\dot{Y}_{n-1} + P_n^T M_n P_n\ddot{V}_n + P_n^T M_n S_{n-1} + P_n^T Q_n - F_n^T u_n = 0 \tag{8-5-21}$$

若将方程(8-5-21)分解为二组方程，利用

$$[P_n^T M_n T_{n-1}]_{13} = 0 \qquad [P_n^T M_n T_{n-1}]_{23} = 0$$

消除第 n 个连杆与第 $n-1$ 个连杆弹性运动之间的耦合现象，可得

$$[P_n^T M_n T_{n-1}]_{11}\ddot{r}_{n-1} + [P_n^T M_n T_{n-1}]_{12}\dot{\omega}_{n-1} + [P_n^T M_n P_n]_{11}\ddot{\theta}_n + [P_n^T M_n P_n]_{12}\ddot{q}_n + [P_n^T M_n S_{n-1}]_1 + [P_n^T Q_n]_1 - [F_n^T]_1 u_n = 0 \tag{8-5-22}$$

$$[P_n^T M_n T_{n-1}]_{21}\ddot{r}_{n-1} + [P_n^T M_n T_{n-1}]_{22}\dot{\omega}_{n-1} + [P_n^T M_n P_n]_{21}\ddot{\theta}_n + [P_n^T M_n P_n]_{22}\ddot{q}_n + [P_n^T M_n S_{n-1}]_2 + [P_n^T Q_n]_2 - [F_n^T]_2 u_n = 0 \tag{8-5-23}$$

式中带右下标的方括号代表方括号内矩阵的相应子矩阵.

(2)首先假定柔性机械臂是刚性的,即不考虑柔性运动对刚性运动的影响,则由(8-5-22)式可确定出在刚性模型下的控制力矩 u_n.

(3)将 u_n 代入到方程(8-5-23)中,可通过数值计算解出描述第 n 个连杆相对弹性变形的模态坐标 q_n.

(4)利用已解出的 q_n,就可由(8-5-22)式确定作用于柔性机械臂第 n 个铰关节的控制力矩 u_n.

(5)根据已经确定出的控制力矩及有关的系统响应信息,并反复进行(1)—(4)的分析过程,就可依次递推地确定出作用于各个铰关节的控制力矩.

本节提出的柔性机械臂轨迹追踪的逆动力学方法,不必依赖于具有复杂形式的系统动力学方程,由于开环控制力矩的确定是由从端部连杆到根部连杆的递推过程实现的,因而极大地提高了逆动力学分析的计算效率. 也应当指出,在进行逆动力学分析(2)—(4)步时,把原本是刚柔运动相互耦合的动力学方程分开来处理了,这将会引起一定的控制误差.

§6. 柔性机械臂逆动力学开环控制的实验研究

§6.1 实验装置简介

我们借鉴了国内外柔性机械臂实验研究的有益经验,兼顾到开环及闭环控制的不同需要,设计、安装和调试了一套简单柔性机械臂实验装置. 并利用该装置对实现简单柔性机械臂点位控制的逆动力学方法进行了实验研究.

柔性机械臂实验装置主要由直流伺服/测速电机、谐波减速器、光电编码器、机械臂和支架等组成. 采用一种可控性好、转动惯量和机电时间常数小的空心杯式直流伺服/测速机组作为转动铰的驱动及测速元件,型号为:SYK90/36S-CZ01.

由于直流伺服电机转速高、输出力矩小,在作为柔性机械臂实验装置的驱动环节时,需与承载能力强、传动比大、传动精度高的谐波减速器串联使用. 从协调机械臂和伺服电机间转速考虑,选用了减速比126:1,额定输出力矩2Nm 的谐波减速器,为了检测机械臂的转动角度,采用了每转输出脉冲数为3000的光电编码器,型号为 LEC-300-G05E,光电编码器的输出为反映正、反转的二路脉冲信号,通过统计输出脉冲数,可以确定转动的绝对角度. 由于脉冲信号强度弱、宽度窄,是经整形后才由计数器 NEC8253转换为数字量的.

柔性臂结构作为受控对象,应具有较大的柔性,其结构形状和尺寸如图8-11所示.

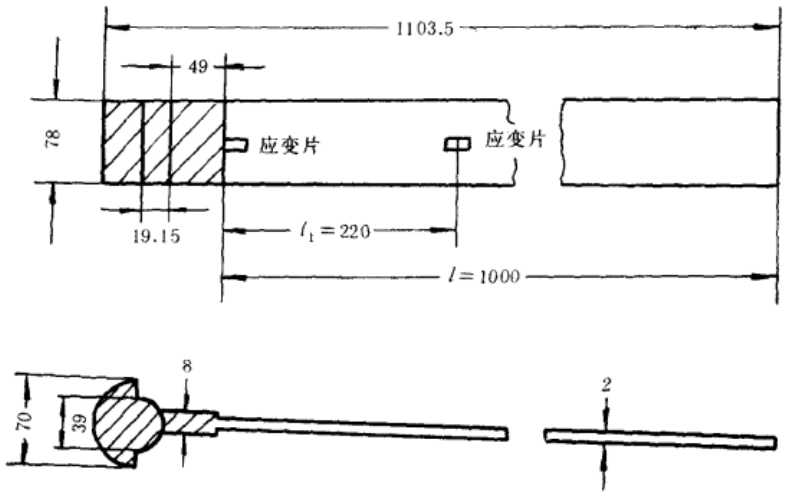


图8-11　柔性臂结构的尺寸

采用低频特性较好的应变片作为测量机械臂弹性变形的传感器，二组应变片（含补偿片）的位置如图8-11所示，此时利用关系式：

$$\varepsilon_1 = h[\varphi_1^{11}(0)q_1(t) + \varphi_2^{11}(0)q_2(t)]/2 \qquad (8-6-1)$$

$$\varepsilon_2 = h[\varphi_1^{11}(l_1)q_1(t) + \varphi_2^{11}(l_2)q_2(t)]/2 \qquad (8-6-2)$$

就可以确定出柔性机械臂末端点的相对弹性位移：

$$\delta(t) = \varphi_1(l)q_1(t) + \varphi_2(l)q_2(t) \qquad (8-6-3)$$

式中，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 为应变片的应变值，$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 为柔性臂结构的前二阶模态，$q_1(t),q_2(t)$ 为相应的模态坐标；

柔性臂结构的塔式支架是由几个分件组合而成，各分件由铸铁单独铸成，结合面精细加工，以保证支架具有较大的刚性. 安装时保证了电机输出轴、谐波减速器轴、转动轴和光电编码器轴具有较高的同轴度. 各轴采用联轴节相连，便于组装和维护. 转动轴和光电编码器轴是由柔性联轴节连接，以避免损害抗扭能力很差的高精度位置检测元件光电码盘. 光电编码器安装于转动轴上方，避免发生计数饱和现象.

§6.2　伺服系统

整个实验装置的控制核心是一台 PC/XT 微型计算机. 由检测元件——测速电机和应变片产生的输出信号为模拟量，经 A/D 转换成数字量送入计算机，而由计算机产生的控制信号为数字量，经 D/A 转换变成模拟量作用于伺服电机. 采用 HY -1215采集板实现模拟量与数字量之间的转换，转换时间为25μs. 该板由 AD574十六通道12位 A/D 转换器和 ADC1210二通道12位 D/A 转换器组成.

由于直流伺服电机的额定电压为24伏，额定电流为6安培，因此必须将模拟量进行功率放大. 功率放大器采用了哈尔滨工业大学机器人研究所研制开发的模拟伺服板，用220V 和26V 交流电为主电中和控制电路供电. 模拟伺服板由 PNM 功率放大器及电流环和速度环构成. PWM 功率放大器包括电压脉宽变换器和开关式功率放大器两部分，它功

率损耗低，其固有的“动力润滑”特性可降低电机的死区电压、改善伺服系统的低速特性. 电流环能加快伺服系统的响应速度，对电网的电压波动起到迅速调节的作用. 速度环则有助于克服系统内干摩擦的影响.

在实验过程中，我们在模拟伺服板的电流环和速度环基础上，又增加了一个位置反馈外环，从而构成了一个高精度的三环伺服系统，保证了铰关节的轨迹追踪精度. 图8-12给出了整个伺服系统的结构框图.

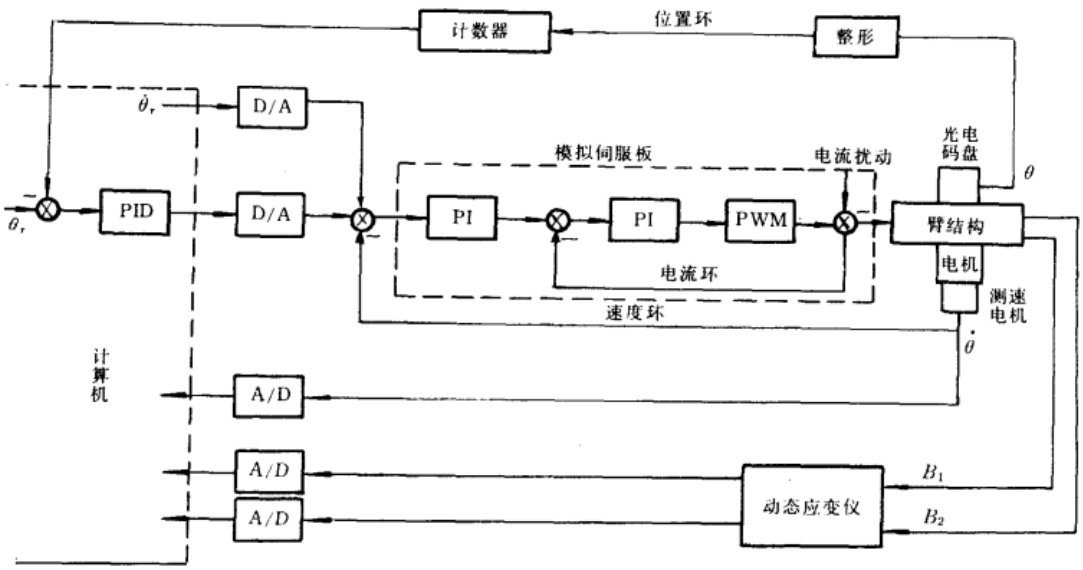


图8-12　柔性机械臂伺服系统结构框图

位置反馈环是一个关于铰关节位置反馈信号的PID调节器，它是由在计算机内运行的汇编程序实现的. 由于整个伺服系统是个三环嵌套的结构，从内环到外环的控制频带必然会越来越窄，如何通过调整伺服系统中的反馈参数来适应柔性机械臂实验研究的需要将是一项有意义的研究工作. 考虑到柔性机械臂的频率特性及伺服电机的机电时间常数，选择参考输入的频率为50Hz，此时各检测信号的采样频率都远高于参考输入的频率.

§6.3　柔性机械臂逆动力学的实验研究

根据本章第四节提出的逆动力学方法，取$\gamma=4.0,\delta=0.6,N=30$时，确定了使柔性机械臂在2s内转动90°角的最优运动轨迹$\theta_r(t)$及$\theta_r(t)$. 在高精度伺服系统的控制下，铰的实际运动轨迹几乎完全与给定的参考输入一致，使得由于整体运动所激起的柔性臂结构弹性振动最小，从而实现了柔性机械臂末端的点位运动. 图8-13为所求出的输入力矩. 由图8-14给出的实测到的末端相对弹性位移$\delta(t)$基本上反映了整体运动加速度的变化规律，其中的高频成分则可能来源于测量过程中的干扰噪声.

为了证实逆动力学方法的有效性，我们还以在阶跃控制力矩作用下，使“刚性化”机械臂在2s内转动90°角的运动轨迹$\theta_r(t)$和$\theta_r(t)$作为参考输入进行了实验研究. 图8-

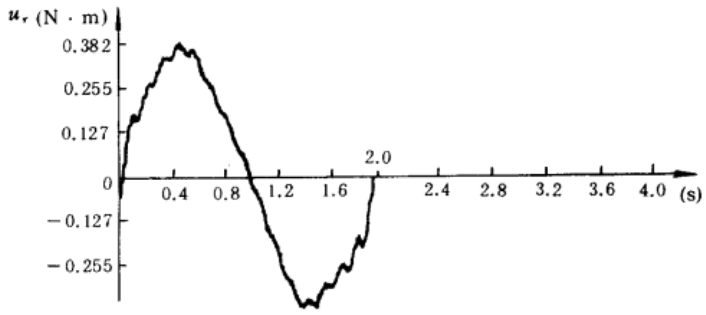


图 8-13　参考输入力矩（逆动力学分析）

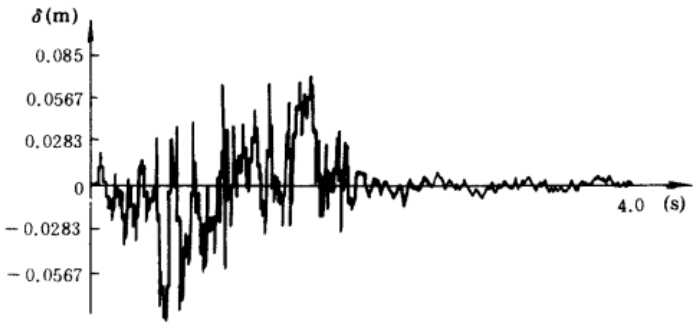


图 8-14　实测末端振动（逆动力学分析）

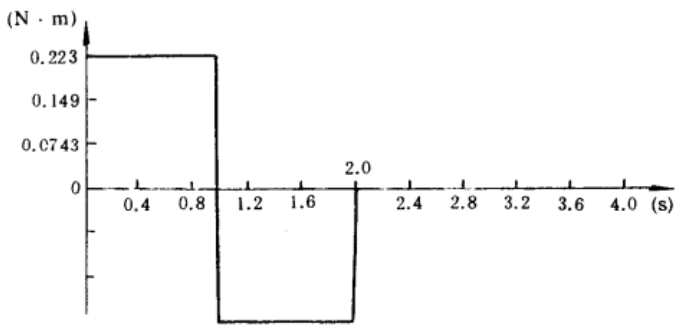


图 8-15　阶跃输入力矩

15为阶跃输入力矩．实测到的末端相对弹性位移由图8-16表示．

对比图8-14和图8-16很容易发现，逆动力学分析过程有助于降低柔性臂结构在工作位置处的相对弹性位移，提高了柔性机械臂点位运动的控制精度．

最后，我们应该看到逆动力学方法的主要缺点是对系统动力学模型的依赖程度高、鲁

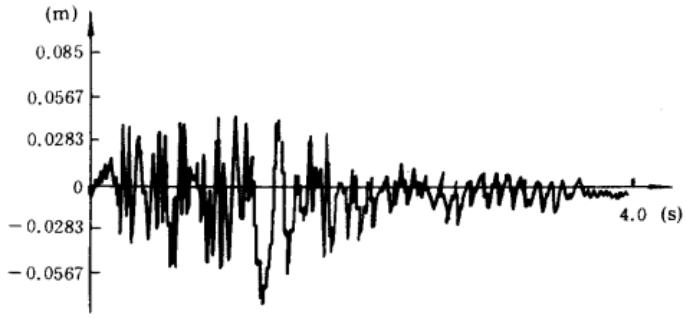


图8-16　阶跃力矩作用下的机械臂的末端振动

棒性能低，因此在目前的实验条件下还难以取得令人满意的控制效果.

附录 A　关于刚体转动的一些概念

§1. 坐标转换矩阵

设有两组直角坐标参考系，它们的单位基向量分别记作：$\underset{\sim}{b}_1^T=(b_{11},b_{12},b_{13})$ 和 $\underset{\sim}{b}_2^T=(b_{21},b_{22},b_{23})$. 这里元素 b_{ij} 表示第 i 组直角坐标参考系的 j 方向的单位基向量. 为书写简洁，b_{ij} 不写作 $\vec{b}_{ij}$，但注意它专记单位基向量.

设这两组坐标参考系间有转换关系：

$$\underset{\sim}{b}_i=\underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{b}_j \tag{A-1}$$

A_{ij} 称为坐标转换矩阵. 若将（A－1）式两侧各点乘以 $\underset{\sim}{b}_j^T$，并注意 $\underset{\sim}{b}_j$ 是直角坐标系的单位基向量列阵，因而有

$$\underset{\sim}{b}_j\cdot\underset{\sim}{b}_j^T=\underset{\sim}{I} \tag{A-2}$$

则显然有

$$\underset{\sim}{b}_i\cdot\underset{\sim}{b}_j^T=\underset{\sim}{A}_{ij} \tag{A-3}$$

这是坐标转换阵的数学定义. 将（A-3）式展开，可有

$$A_{ij}^{mk}=b_{im}\cdot b_{jk} \tag{A-4}$$

就是说坐标转换阵 $\underset{\sim}{A}_{ij}$ 的第 m 行 k 列元素的物理意义是 b_{im} 与 b_{jk} 两个基向量间的方向余弦. 因此，A_{ij} 又称为方向余弦阵.

现将（A-1）式的两侧各点乘以 $\underset{\sim}{b}_i^T$，则有

$$\underset{\sim}{b}_i\cdot\underset{\sim}{b}_i^T=\underset{\sim}{A}_{ij}(\underset{\sim}{b}_j\cdot\underset{\sim}{b}_i^T) \tag{A-5}$$

注意（A-2）式，则可知上式左侧为单位阵，而参考（A-3）可知

$$\underset{\sim}{b}_j\cdot\underset{\sim}{b}_i^T=\underset{\sim}{A}_{ji} \tag{A-6}$$

于是由（A-5）知

$$\underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{A}_{ji}=\underset{\sim}{I}$$

这就是说

$$\underset{\sim}{A}_{ij}=\underset{\sim}{A}_{ji}^{-1}\text{ 或 }\underset{\sim}{A}_{ji}=\underset{\sim}{A}_{ij}^{-1} \tag{A-7}$$

再注意（A-3）和（A-6），可知

$$\underset{\sim}{A}_{ij}^T=\underset{\sim}{A}_{ji}.$$

由此得

$$\underset{\sim}{A}_{ji}=\underset{\sim}{A}_{ij}^{-1}=\underset{\sim}{A}_{ij}^T \tag{A-8}$$

就是说转换矩阵 A_{ij} 具有正交性，是正交矩阵.

又倘有三组坐标参考系，它们的基向量列阵分别是 $\underset{\sim}{b}_i,\underset{\sim}{b}_j$ 和 $\underset{\sim}{b}_k$，且已知

$$\underset{\sim}{b}_i=\underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{b}_j,\quad \underset{\sim}{b}_j=\underset{\sim}{A}_{jk}\underset{\sim}{b}_k\quad\text{和}\quad\underset{\sim}{b}_i=\underset{\sim}{A}_{ik}\underset{\sim}{b}_k$$

则显然有

$$\underset{\sim}{b}_i = \underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{A}_{jk}\underset{\sim}{b}_k, \quad \text{或} \ \underset{\sim}{A}_{ik} = \underset{\sim}{A}_{ij}\underset{\sim}{A}_{jk} \tag{A-9}$$

这是坐标转换阵的又一个特性，或称为坐标转换矩阵的链式规则.

§2. 向量运算的矩阵表达

一个向量 $\vec{u}$，它在某坐标参考系 $\underset{\sim}{b}^T=(b_1, b_2, b_3)$ 内的分量为 $\underset{\sim}{u}^T=(u_1, u_2, u_3)$. 这时 $\vec{u}$ 向量的矩阵表示可写作

$$\vec{u} = \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{u} \quad \text{或} \quad \vec{u} = \underset{\sim}{u}^T\underset{\sim}{b} \tag{A-10}$$

倘有两个向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$，都在同一个坐标参考系内. 现在求其点积和叉积运算的矩阵表达.

两向量的点积：

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\underset{\sim}{u}^T\underset{\sim}{b})\cdot(\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{u}^T(\underset{\sim}{b}^T\cdot\underset{\sim}{b})\underset{\sim}{v}$$

注意由（A-2）有 $\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{b}^T=\underset{\sim}{I}$，因而有

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \underset{\sim}{u}^T\underset{\sim}{v}$$

还可给出

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} = (\underset{\sim}{v}^T\underset{\sim}{b})\cdot(\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{u}) = \underset{\sim}{v}^T\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}^T\underset{\sim}{v} \tag{A-11}$$

两向量的叉积：

$$\vec{u}\times\vec{v} = (\underset{\sim}{u}^T\underset{\sim}{b})\times(\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{u}^T(\underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{b}^T)\underset{\sim}{v} \tag{A-12}$$

这里定义

$$\underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{b}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \times [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} b_1\times b_1 & b_1\times b_2 & b_1\times b_3 \\ b_2\times b_1 & b_2\times b_2 & b_2\times b_3 \\ b_3\times b_1 & b_3\times b_2 & b_3\times b_3 \end{bmatrix}$$

注意 $b_1\times b_1=0$；$b_1\times b_2=b_3$；$b_2\times b_1=-b_3$ 等，上式写作：

$$\underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{b}^T = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{bmatrix} = -\underset{\sim}{\tilde{b}}$$

$\underset{\sim}{\tilde{b}}$ 称为列阵 $\underset{\sim}{b}$ 的斜方阵. 还可由运算证明

$$-\underset{\sim}{u}^T\underset{\sim}{\tilde{b}} = \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{\tilde{u}} \tag{A-13}$$

则（A-12）可写作：

$$\vec{u}\times\vec{v} = \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{\tilde{u}}\,\underset{\sim}{v} \tag{A-14}$$

注意（A-14）式只当 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 是同一坐标系内量时才成立. 若 $\vec{u}=\underset{\sim}{a}^T\underset{\sim}{u}$，$\vec{v}=\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{v}$，则需先将两者统一于同一个参考系，再引用（A-14）. 由（A-1）可知 $b^T=a^TA_{ba}^T$，因此

$$\vec{v} = \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{a}^TA_{ba}^T\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{a}^T\underset{\sim}{v}_a$$

其中 $\underset{\sim}{v}_a$ 是 $\vec{v}$ 在 $\underset{\sim}{a}$ 参考系内表达的分量，

$$v_a = A_{ba}^T\underset{\sim}{v} = A_{ab}\underset{\sim}{v}$$

这样 $\vec{u}\times\vec{v}$ 在 $\underset{\sim}{a}$ 参考系可表达为

$$\vec{u}\times\vec{v}=\underset{\sim}{a}^{T}\tilde{\underset{\sim}{u}}\,\underset{\sim}{A}_{ab}\underset{\sim}{v} \tag{A-15a}$$

而在 $\underset{\sim}{b}$ 参考系内则可表达为

$$\vec{u}\times\vec{v}=\underset{\sim}{b}^{T}(\underset{\sim}{A}_{ba}\tilde{\underset{\sim}{u}}\,\underset{\sim}{A}_{ab})\underset{\sim}{v} \tag{A-15b}$$

§3. 角速度向量与坐标转换矩阵间关系

设有一个惯性坐标参考系，它的基向量为 $\underset{\sim}{e}^{T}=(e_1, e_2, e_3)$，另有一个物体 B，B 上有连体坐标系，它的基向量为 $\underset{\sim}{b}^{T}=(\underset{\sim}{b}_1, \underset{\sim}{b}_2, \underset{\sim}{b}_3)$. 按上节定义，有

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{A}_{be}\underset{\sim}{e} \tag{A-16}$$

$\underset{\sim}{A}_{be}$是转换矩阵.

如果物体绕着连体坐标系 $\underset{\sim}{b}$ 相对于惯性坐标参考系以角速度 $\vec{\omega}$旋转时，连体坐标系相对于惯性坐标参考系也有旋转. 就是说（A-16）式中的 $\underset{\sim}{b}$和 $\underset{\sim}{A}_{be}$都随时间而变化. 将（A-16）式对时间求导数，有

$$\dot{\underset{\sim}{b}}=\dot{\underset{\sim}{A}}_{be}\underset{\sim}{e} \tag{A-17}$$

这里 $\dot{\underset{\sim}{b}}=\dfrac{d\,\underset{\sim}{b}}{dt}$，$\dot{\underset{\sim}{A}}_{be}=\dfrac{d\underset{\sim}{A}_{be}}{dt}$.

另一方面，由于 $\dot{\underset{\sim}{b}}$是由于角速度向量 $\vec{\omega}$引起的，因此还可由 $\vec{\omega}$求 $\dot{b}$. 首先，将角速度向量定义在连体坐标参考系 $\underset{\sim}{b}$内，即令

$$\vec{\omega}=\omega_1 b_1+\omega_2 b_2+\omega_3 b_3=\underset{\sim}{b}^{T}\underset{\sim}{\omega} \tag{A-18}$$

就是说，ω_i 是物体绕单位基向量 b_i 的角速度分量.

其次，再考虑物体 B 只以 ω_1绕 b_1轴转动（$\omega_1 dt$）角度的情况，这时连体参考系 $\underset{\sim}{b}$由初始位置（图 A-1中实线）移动到新的位置（图 A-1中虚线）. 由图可见，由于 $\underset{\sim}{\omega}_1$的影响，使得 b_2和 b_3都有增量：

$$db_2=(\omega_1 dt)b_3$$

$$db_3=(\omega_1 dt)(-b_2)$$

式中（$\omega_1 dt$）是它们的模，而 b_3和（$-b_2$）分别表示它们的方向. 由此得到 ω_1对于 $\dot{b}$的贡献为

$$\left(\frac{db_2}{dt}\right)_1=\omega_1 b_3 \qquad \left(\frac{db_3}{dt}\right)_1=-\omega_1 b_2, \qquad \left(\frac{db_1}{dt}\right)_1=0b_1$$

类似可求得 ω_2和 ω_3对 $\underset{\sim}{b}$ 的贡献

$$\left(\frac{db_1}{dt}\right)_2=-\omega_2 b_3, \quad \left(\frac{db_2}{dt}\right)_2=0b_2, \quad \left(\frac{db_3}{dt}\right)_2=\omega_2 b_1$$

$$\left(\frac{db_1}{dt}\right)_3=\omega_3 b_2 \quad \left(\frac{db_1}{dt}\right)_3=-\omega_3 b_1 \quad \left(\frac{db_3}{dt}\right)=0b_3$$

于是

$$\frac{db_1}{dt}=\left(\frac{db_1}{dt}\right)_1+\left(\frac{db_1}{dt}\right)_2+\left(\frac{db_1}{dt}\right)_3=0b_1-\omega_2 b_3+\omega_3 b_2$$

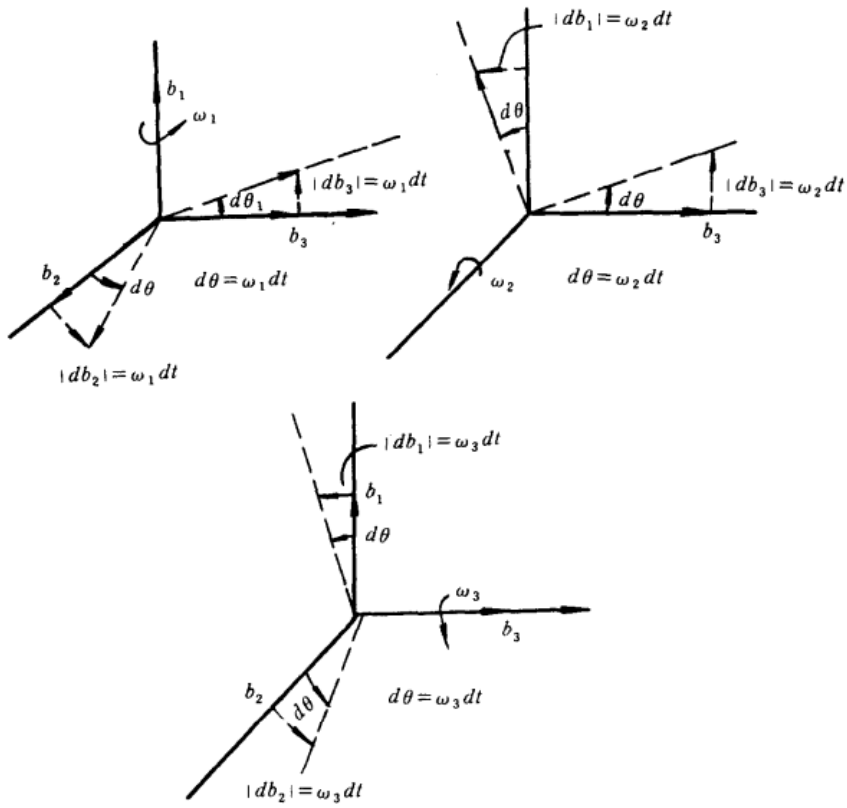


图 A-1　角速度与 $\dot{b}$ 关系

$$\frac{db_2}{dt}=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{db_2}{dt}\right)_k=\omega_1 b_3+0b_2-\omega_3 b_1$$

$$\frac{db_3}{dt}=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{db_3}{dt}\right)_k=-\omega_1 b_2+\omega_2 b_1+0b_3$$

上式可以用矩阵形式写作

$$\dot{\underset{\sim}{b}}=\tilde{\underset{\sim}{\omega}}^T\underset{\sim}{b}\quad\text{或}\quad\dot{\underset{\sim}{b}}^T=\underset{\sim}{b}^T\tilde{\underset{\sim}{\omega}}\tag{A-19}$$

其中

$$\tilde{\underset{\sim}{\omega}}=\begin{bmatrix}0&-\omega_3&\omega_2\\ \omega_3&0&-\omega_1\\ -\omega_2&\omega_1&0\end{bmatrix}\tag{A-20}$$

称为 $\underset{\sim}{\omega}$ 列阵的斜方阵.

将（A-19）和（A-16）代入（A-17），则有

$$\tilde{\underset{\sim}{\omega}}^T\underset{\sim}{A}_{bc}e=\dot{\underset{\sim}{A}}_{bc}e$$

注意 e 是惯性坐标系的单位基向量，因此诸元素是相互独立的，因而有

$$\tilde{\omega}^T A_{be} = \dot{A}_{be}$$

或改写一下，得到关于角速度斜方阵的著名关系式：

$$\tilde{\omega}^T = \dot{A}_{be} A_{eb} \tag{A-21}$$

或由（A-8）上式还可写作

$$\tilde{\omega} = A_{be}\dot{A}_{be}^T = A_{eb}^T \dot{A}_{eb} \tag{A-22}$$

在上两式中注意下标的顺序及含义，并注意 $\vec{\omega}$ 是在连体坐标系内定义的，参看(A-18)式.

§4. 动坐标参考系内向量的时间导数

设有一个物体 B，它的连体坐标参考系是 $b^T=(b_1, b_2, b_3)$. b_1、b_2和 b_3是连体坐标参考系的三个单位基向量. 物体 B（因而也是连体坐标参考系 b）相对惯性坐标 $e^T=(e_1, e_2, e_3)$ 有角速度 $\vec{\omega}$. 设物体 B 上有一个向量 $\vec{u}$，记作

$$\vec{u} = b^T u \tag{A-23}$$

其中 $u^T=(u_1, u_2, u_3)$ 是向量 $\vec{u}$ 在连体参考系内的分量. $\vec{u}$ 被称为在动坐标参考系 b 内的向量.

现在，我们拟求向量 $\vec{u}$ 的时间导数：

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{D}{Dt}(b^T u)$$

注意 b 和 $\vec{u}$ 都是时间的导数，因而有

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \dot{b}^T u + b^T \dot{u} \tag{A-24}$$

这里简记 $\dot{(*)}=\frac{d(*)}{dt}$. 将(A-19)代入上式的第一项，得

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = b^T \tilde{\omega} u + b^T \dot{u}$$

注意(A-14)，上式变成

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \tilde{\omega} \times \tilde{u} + \frac{d\vec{u}}{dt} \tag{A-25}$$

式中

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = b^T \dot{u} = \dot{\vec{u}} \tag{A-26}$$

是把参考系 b 看作与时间无关（或者说观察者站在 B 体上，因而认为 b 不随时间改变）时的时间导数. 因此有时称 $\frac{d\vec{u}}{dt}$ 为向量 $\vec{u}$ 在动参考系内求的局部时间导数. 为与 $\frac{d\vec{u}}{dt}$ 区别，特称 $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ 是动坐标系内向量 $\vec{u}$ 在惯性参考系 e 内（或说观察者站在惯性系内）求的时间导数. 当 $\vec{u}$ 是位移向量时，$\frac{D\vec{u}}{Dt}$ 表示 B 体上产生位移 $\vec{u}$ 的点在惯性参考系内的绝对速度，因而又称之

为绝对时间导数. $\frac{d\vec{u}}{dt}$则表示该点在动坐标系内的局部相对速度，因而又称局部（或相对）时间导数. （A -25）可以简写作

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{\omega} \times \vec{u} + \dot{\vec{u}} \tag{A - 27}$$

注意（A -26）关于$\dot{\vec{u}} = \frac{d\vec{u}}{dt}$的定义. 如果$\vec{u}$是位置向量，（A -27）的物理意义就是转动体 B 上一点的绝对速度包括两部分，一是牵连运动速度$\vec{\omega} \times \vec{u}$，一是相对速度$\dot{\vec{u}}$.

§ 5. Euler 角

假如有一个物体 B，绕体上一个固定点相对于另一个固定的物体 A 作有限转动. 著名的 Euler 定理指出，可以把这一个有限转动分解成相继的三次转动，而以每次绕其新的连体坐标系的某一个轴的转角作为描述物体转动的参数. 这三个转角参数符合转动在空间应有的三个自由度，并称为 Euler 角.

现在记物体 A 和 B 的连体参考系分别为：$\underset{\sim}{a}^T = (a_1, a_2, a_3)$ 和 $\underset{\sim}{b}^T = (b_1, b_2, b_3)$. 并设转动前 $\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$ 完全重合，转动结束后 B 体的最终位置达到 $\underset{\sim}{b}$. 又如规定转动的顺序如下：第一次转动后 B 的连体基位置为 $\underset{\sim}{b}_1^T = (b_{11}, b_{12}, b_{13})$，且是绕 $b_{11} = a_1$ 轴转动 φ_1 角，参看图 A -2，a. 这时 $\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}_1$ 间关系为

$$\begin{aligned} a_1 &= b_{11} \\ a_2 &= b_{12}\cos\varphi_1 - b_{13}\sin\varphi_1 = b_{12}c_1 - b_{13}s_1 \\ a_3 &= b_{12}\sin\varphi_1 + b_{13}\cos\varphi_1 = b_{12}s_1 + b_{13}c_1 \end{aligned}$$

这里我们简记 $c_1 = \cos\varphi_1$，$s_1 = \sin\varphi_1$，于是上式可写作

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{A}_{a1}\underset{\sim}{b}_1$$

其中

$$\underset{\sim}{A}_{a1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

第二次转动后，新的连体基记作 $\underset{\sim}{b}_2^T = (b_{21}, b_{22}, b_{23})$，并约定绕新体轴 $b_{22} = b_{12}$ 转角度 φ_2. 由图 A -2，b 可见此时

$$\underset{\sim}{b}_1 = \underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{b}_2$$

而

$$\underset{\sim}{A}_{12} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

第三次转动后的连体坐标系记作 $\underset{\sim}{b}^T = (b_1, b_2, b_3)$，并约定绕新体轴 $b_3 = b_{23}$ 转动角度 φ_3，由图 A -2，c 可见此时

$$\underset{\sim}{b}_2 = \underset{\sim}{A}_{2b}\underset{\sim}{b}$$

而

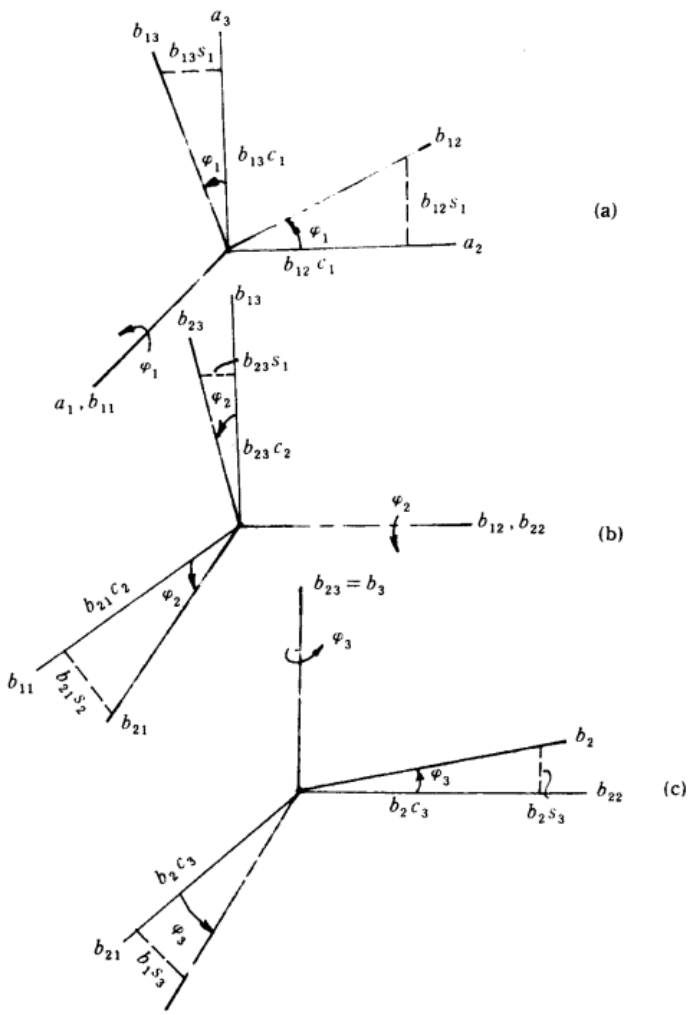


图 A-2

$$\underset{\sim}{A}_{2b}=\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中

$$c_i=\cos\varphi_i,\quad s_i=\sin\varphi_i(i=1,2,3).$$

这样就得到当顺序为1-2-3时以 Euler 角表示的连体参考系 $\underset{\sim}{b}$ 与固定参考系 a 间的转换矩阵 $\underset{\sim}{A}_{ab}$，根据(A-9)式的转换矩阵的链式规则可以写出 $\underset{\sim}{A}_{ab}$ 为

$$\underset{\sim}{A}_{ab}=\underset{\sim}{A}_{a1}\underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{A}_{2b}$$

整理后，得

$$\underset{\sim}{A}_{ab} = \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2c_3 & s_2 \\ c_1s_3 + s_1s_2c_3 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2 \\ s_1s_3 - c_1s_2s_3 & s_1c_3 + c_1s_2s_3 & c_1c_2 \end{bmatrix} \tag{A-28}$$

转动顺序为1-2-3的 Euler 角，在一些文献中又称为 Bryant 角或 Cardan 角，俄文文献又称为克雷洛夫角. 当 φ_i 都很小时，可认为 $c_i \approx 1$ 而 $s_i \approx \varphi_i$. 这样略去关于 s_i 的高阶项，上式可以简化为

$$\underset{\sim}{A}_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 1 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 1 \end{bmatrix} = I + \underset{\sim}{\tilde{\varphi}} \tag{A-29}$$

其中 $\underset{\sim}{\tilde{\varphi}}$ 是 $\varphi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ 的斜方阵.

对于不同的转动顺序，可以有12类 Euler 角，它们的转换矩阵给在表 A-1 中. 其中的3-1-3型 Euler 角又被一些文献专称之为 Euler 角. 它的三个量 φ_1，φ_2 和 φ_3 又依次被称为进动角(Precession Angle)、章动角(Notation Angle)和自转角(Rotation Angle).

无论对于哪一类 Euler 角，都可由转换矩阵求出相应的 Euler 角. 例如对于 Bryant 角(1-2-3型 Euler 角)，由(A-28)可知，它的第一行第三列元素 A_{ab}^{13} 就是 $\sin\varphi_2$，因而可求得

$$\varphi_2 = \arcsin A_{ab}^{13}$$

并由 A_{ab}^{13} 还可求出

$$\begin{aligned} c_2 = \cos\varphi_2 &= \sqrt{1 - \sin^2\varphi_2} \\ &= \sqrt{1 - (A_{ab}^{13})^2} \end{aligned}$$

由此再利用

$$A_{ab}^{12} = -c_2s_3$$

求出

$$s_3 = \sin\varphi_3$$

$$\begin{aligned} \sin\varphi_3 &= -\frac{-A_{ab}^{12}}{c_2} \\ &= -\frac{A_{ab}^{12}}{\sqrt{1 - (A_{ab}^{13})^2}} \end{aligned}$$

等等. 这里注意，当 A_{ab}^{13}（在这里等于 $\sin\varphi_2$）趋于1，就是说当 φ_2 接近于 $\frac{\pi}{2} + n\pi (n = 0, 1, 2\cdots)$ 时，上式分母趋于零. 这就是说，采用 Bryant 角时，当 φ_2 接近于 $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ 时将出现奇异性. 它的物理解释是很清楚的，当 φ_2 接近 $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ 时，b_{32} 落到 b_{11} 的原位置. 这样第三次转动与第一次转动不是独立的.

对于任何一类 Euler 角都可由转换矩阵 A_{ab} 的某些元素求出各 Euler 角之值. 但是都存在奇异性. 这是 Euler 角的一个普遍的缺点.

这里还请注意，由于 $\varphi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ 的三个量是沿着三个不同参考系的三个轴的，因此它们并不是构成角向量的分量. 事实上在有限转动下，转角不是向量.

表 A -1[47]

顺　序	A_{ab}		
1-2-3	c_2c_3	$-c_2s_3$	s_2
	$s_1s_2c_3+s_3c_1$	$-s_1s_3s_3+c_3c_1$	$-s_1c_2$
	$-c_1s_2c_3+s_3s_1$	$c_1c_2s_3+c_3c_1$	c_1c_2
2-3-1	c_1c_2	$-c_1s_2s_3+s_3s_1$	$c_1c_2s_3+c_3s_1$
	s_2	c_2c_3	$-c_2s_3$
	$-s_1c_2$	$s_1s_2c_3+s_3c_1$	$-s_1s_2s_3+c_3c_1$
3-1-2	$-s_1s_2s_3+c_3c_1$	$-s_1c_2$	$s_1s_2c_3+s_3c_1$
	$c_1s_2s_3+c_3s_1$	c_1c_2	$-c_1s_2c_3+s_3s_1$
	$-c_2s_3$	s_2	c_2c_3
1-3-2	c_2c_3	$-s_2$	c_2c_3
	$c_1s_2c_3+s_3s_1$	c_1c_2	$c_1s_2s_3-c_3s_1$
	$s_1s_2c_3+s_3c_1$	s_1c_2	$s_1s_2s_3+c_3c_1$
2-1-3	$s_1s_2s_3+c_3c_1$	$s_1s_2s_3-s_3c_1$	s_1c_2
	c_2s_3	c_2c_3	$-s_2$
	$c_1s_1s_3-c_3s_1$	$c_1s_2c_3+s_3s_1$	c_1c_2
3-2-1	c_1c_2	$c_1s_2s_3-c_3s_1$	$c_1s_2s_3+s_3s_1$
	s_1c_2	$s_1s_2s_3+c_3c_1$	$s_1s_2c_3-s_3c_1$
	$-s_2$	c_2s_3	c_2c_3
1-2-1	c_2	s_2s_3	s_2c_3
	s_1s_2	$-s_1c_2s_2+c_3c_1$	$-s_1c_2c_3-s_3c_1$
	$-c_1s_2$	$c_1c_2s_3+c_3s_1$	$c_1c_2c_3-s_3s_1$
1-3-1	c_2	$-s_2c_3$	s_2s_3
	c_1s_2	$c_1c_2c_3-s_3s_1$	$-c_1c_2s_3-c_3s_1$
	s_1s_2	s_2c_3	$-s_1c_2s_3+c_3c_1$
2-1-2	$-s_1c_2s_3+c_3c_1$	s_1s_2	$s_1c_2c_3+s_3c_1$
	s_2s_3	c_2	$-s_2c_3$
	$-c_1c_2c_3-c_3s_1$	c_1s_2	$c_1c_2c_3-s_3s_1$
2-3-2	$c_1c_2c_3-s_3s_1$	$-c_1s_2$	$c_1c_2s_3+c_3s_1$
	s_2c_3	c_2	s_2s_3
	$-s_1c_2c_3-s_3c_1$	s_1s_2	$-s_1c_2c_3+c_3c_1$
3-1-3	$-s_1c_2s_3+c_3c_1$	$-s_1c_2c_3-s_3c_1$	s_1s_2
	$c_1c_2s_3+c_3s_1$	$c_1c_2c_3-s_3s_1$	$-c_1s_2$
	s_2s_3	s_2c_3	c_2
3-2-3	$c_1c_2c_3-s_3s_1$	$-c_1c_2s_3-c_3s_1$	c_1s_2
	$s_1c_2c_3+s_3c_1$	$-s_1c_2c_3+c_3c_1$	s_1s_2
	$-s_2c_3$	s_2s_3	c_2

§6. Euler 角的时间导数与角速度向量分量间的关系

我们仍以1-2-3型 Euler 角(即 Bryant 角)为例子说明 Euler 角的时间导数与角速度向量 $\vec{\omega}$ 的分量间的关系. 由(A -18)知

$$\vec{\omega} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\omega} = b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 \tag{A-18}$$

另一方面 Bryant 角 φ_1,φ_2 和 φ_3 的三个量是沿着不同参考系的轴的,因此,按上一节中规定的符号,$\vec{\omega}$ 以 Bryant 角的时间导数描写时应为

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}_1 a_1 + \dot{\varphi}_2 b_{22} + \dot{\varphi}_3 b_3$$

而由 $\underset{\sim}{A}_{ab}$ 及 $\underset{\sim}{A}_{2b}$ 两矩阵可知

$$a_1 = c_2c_3b_1 - c_2s_3b_2 + s_2b_3$$
$$b_{22} = s_3b_1 + c_3b_2$$

代入 $\vec{\omega}$ 中,整理后得

$$\vec{\omega} = (c_2c_3\dot{\varphi}_1 + s_3\dot{\varphi}_2)b_1 + (-c_2s_3\dot{\varphi}_1 + c_3\dot{\varphi}_2)b_2 + (s_2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3)b_3$$

与(A -18)式比较可得

$$\underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{B}\,\dot{\varphi} \tag{A-30}$$

其中 $\underset{\sim}{\omega}^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 和 $\dot{\varphi}^T = (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3)$,而

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} c_2c_3 & s_3 & 0 \\ -c_2s_3 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A-31}$$

当 φ_i 很小时,$s_i \approx 0$,则有

$$\underset{\sim}{B} \approx \underset{\sim}{I} \tag{A-32}$$

这是选用 Bryant 角(1-2-3型 Euler 角)的一个优点,此时 $\underset{\sim}{\omega} \approx \dot{\varphi}$.

对于其他类型的 Euler 角,(A -30)转换关系中的转换阵 $\underset{\sim}{B}$ 的形式不同,见表 A -2.

表 A -2[47]

顺 序	B			B^{-1}		
1-2-3	c_2c_3	s_3	0	c_3/c_2	$-s_3/c_2$	0
	$-c_2s_3$	c_3	0	s_3	c_2	0
	s_2	0	1	$-s_2c_3/c_2$	s_2s_3/c_2	1
2-3-1	s_2	0	1	0	c_3/c_2	$-s_3/c_2$
	c_2c_3	s_3	0	0	s_3	c_3
	$-c_2s_3$	c_3	0	1	$-s_2c_3/c_2$	s_2s_3/c_2
3-1-2	$-c_2s_3$	$-s_3$	0	$-s_3/c_2$	0	c_3/c_2
	s_2	0	1	c_3	0	s_3
	c_2c_3	s_3	0	s_2s_3/c_2	1	$-s_2c_3/c_2$

续表 A -2

顺　序	B			B^{-1}		
1-3-2	c_2c_3	$-s_3$	0	c_3/c_2	0	s_3/c_2
	$-s_2$	0	1	s_3	0	c_3
	c_2s_3	c_3	0	c_3s_2/c_2	1	s_3s_2/c_2
2-1-3	c_2s_3	c_3	0	s_3/c_2	c_3/c_2	0
	c_2c_3	$-s_3$	0	c_3	$-s_3$	0
	$-s_2$	0	1	s_3s_2/c_2	c_3s_2/c_2	1
3-2-1	$-s_2$	0	1	0	s_3/c_2	c_3/c_2
	c_2s_3	c_3	0	0	c_3	$-s_3$
	s_2c_3	$-s_3$	0	1	s_3s_2/c_2	c_3s_2/c_2
1-2-1	c_2	0	1	0	s_3/s_2	c_3/s_2
	s_2s_3	c_3	0	0	c_3	$-s_3$
	s_2c_3	$-s_3$	0	1	s_3c_2/s_2	c_3c_2/s_2
1-3-1	c_2	0	1	0	$-c_3/s_2$	s_3/s_2
	$-s_2c_3$	s_3	0	0	s_3	c_3
	s_2c_3	c_3	0	1	c_3c_2/s_2	$-s_3c_2/s_2$
2-1-2	s_2s_3	c_3	0	s_3/s_2	0	$-c_3/s_2$
	c_2	0	1	c_3	0	s_3
	$-s_2c_3$	s_3	0	$-s_3c_2/s_2$	1	c_3c_2/s_2
2-3-2	s_2c_3	$-s_3$	0	c_3/s_2	0	s_3/s_2
	c_2	0	1	$-s_3$	0	c_3
	$-s_2c_3$	c_3	0	$-c_3c_2/s_2$	1	s_3c_2/s_2
3-1-3	s_2c_3	c_3	0	s_3/s_2	c_3/s_2	0
	s_2c_3	$-s_3$	0	c_3	$-s_3$	0
	c_2	0	1	$-s_3c_2/s_2$	c_3c_2/s_2	1
3-2-3	$-s_2c_3$	s_3	0	$-c_3/s_2$	s_3/s_2	0
	s_2s_3	c_3	0	s_3	c_3	0
	c_2	0	1	c_3c_2/s_2	$-s_3c_2/s_2$	1

§7. Euler 参 数

设有一个物体 B 绕定轴作有限转动. 设转动角度为 φ，且该轴的单位向量为 $\vec{u}$，则 Euler 参数定义为

$$g_0 = \cos\varphi \tag{A-33}$$

$$\vec{g} = \vec{u}\sin\varphi \tag{A-34}$$

其中 $\vec{g}$ 的三个分量为 $g^T = (g_1, g_2, g_3)$. 由上两式可知

$$g_0^2 + \vec{g}\cdot\vec{g} = \cos^2\varphi + (\sin^2\varphi)(\vec{u}\cdot\vec{u})$$

其中 $\vec{u}$ 是单位向量，因而 $(\vec{u}\cdot\vec{u}) = 1$，于是

$$g_0^2 + g^T g = 1$$

或

$$g_0^2 + g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 1 \tag{A-35}$$

就是说 Euler 参数间有约束关系(A-35).

根据刚体的定轴有限转动公式，可以得出相应的转换矩阵[82]

$$\underset{\sim}{A}_{ab} = \begin{bmatrix} 2(g_0^2+g_1^2)-1 & 2(g_1g_2-g_0g_3) & 2(g_1g_3+g_0g_1) \\ 2(g_1g_2+g_0g_3) & 2(g_0^2+g_2^2)-1 & 2(g_2g_3-g_0g_1) \\ 2(g_3g_1-g_0g_2) & 2(g_3g_2+g_0g_1) & 2(g_0^2+g_3^2)-1 \end{bmatrix} \tag{A-36}$$

或更简捷写作

$$\underset{\sim}{A}_{ab} = (2g_0^2-1)\underset{\sim}{I} + 2\underset{\sim}{g}\,\underset{\sim}{g}^T + 2g_0\underset{\sim}{\tilde{g}} \tag{A-37}$$

其中 $\underset{\sim}{\tilde{g}}$ 是矩阵 $\underset{\sim}{g}^T = (g_1, g_2, g_3)$ 的斜方阵；$\underset{\sim}{I}$ 是单位阵.

由(A-36)可见，倘 $\underset{\sim}{A}_{ab}$ 已知，则由它的三个主元项之和(数学上记作 $\mathrm{tr}\underset{\sim}{A}_{ab}$，称为 $\underset{\sim}{A}_{ab}$ 的迹)可求出 g_0：

$$g_0^2 = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\underset{\sim}{A}_{ab} + 1 \tag{A-38}$$

再利用 $\underset{\sim}{A}_{ab}$ 的三个主元项可分别求出 g_1, g_2, g_3. 显然，由转换阵 $\underset{\sim}{A}_{ab}$ 求 Euler 参数时没有奇异性的问题. 这是采用 Euler 参数的主要优点.

Euler 参数的时间导数与角速度向量 $\underset{\sim}{\omega}$ 之间的关系，可由(A-22)的著名关系求出：

$$\underset{\sim}{\tilde{\omega}} = \underset{\sim}{A}_{ab}^T\dot{\underset{\sim}{A}}_{ab} \tag{A-39}$$

经过一些换算求出为[82]

$$\underset{\sim}{\omega} = -2(\underset{\sim}{\tilde{g}}\,\underset{\sim}{g} + \dot{g}_0\underset{\sim}{g} - g_0\dot{\underset{\sim}{g}}) \tag{A-40}$$

§8. 并矢张量

张量(Dyadic)的概念可以比照着向量来理解. 向量也是张量的一个特例，又称为一秩张量.

设有一个向量 $\vec{V}$，它在参考系 $\underset{\sim}{b}^T = (b_1, b_2, b_3)$，内表达为

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} V_i^b b_i \tag{A-41}$$

其中 b_i 是参考系 $\underset{\sim}{b}$ 的基向量，V_i^b 是向量 $\vec{V}$ 在 b_i 基向量方向的分量. 以后，我们为了书写简洁，可以略去求总和符号而将(A-41)写作

$$\vec{V} = V_i^b b_i \quad (i = 1—3) \tag{A-42}$$

在这里我们约定：重复下标表示求和的意思. 这个约定称为求和规约(Summation Convention). (A-42)式的 $(i = 1—3)$ 表示求和时指标 i 的取值范围.

现在假设另有一个参考系，$\underset{\sim}{a}^T=(a_1,a_2,a_3)$ 向量 $\vec{V}$ 在这个新坐标系内表达为

$$\vec{V}=V_j^a a_j \quad (j=1-3) \tag{A-43}$$

(A-42)和(A-43)都可以矩阵形式写作

$$\vec{V}=\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{V}_b \tag{A-44}$$

$$\vec{V}=\underset{\sim}{a}^T\underset{\sim}{V}_a \tag{A-45}$$

这里 $\underset{\sim}{V}_a^T=(V_1^a,V_2^a,V_3^a)$；$\underset{\sim}{V}_b^T=(V_1^b,V_2^b,V_3^b)$. 又若已知

$$\underset{\sim}{b}^T=\underset{\sim}{a}^T\underset{\sim}{A}_{ab} \tag{A-46}$$

这里 A_{ab} 是坐标转换矩阵，将(A-46)代入(A-44)，得

$$\vec{V}=\underset{\sim}{a}^T\underset{\sim}{A}_{ab}\underset{\sim}{V}_b \tag{A-47}$$

对比(A-45)和(A-47)，可得

$$\underset{\sim}{V}_a=\underset{\sim}{A}_{ab}\underset{\sim}{V}_b \tag{A-48}$$

上式还可以写作下标形式：

$$V_j^a=A_{ab}^{jk}V_k^b \quad (j,k=1-3) \tag{A-49}$$

式中 A_{ab}^{jk} 是转换矩阵 $\underset{\sim}{A}_{ab}$ 的元素，上式有重复指标(又称求和指标) k. 因此它是一个求和表达式.

综上所述，可见向量 $\vec{V}$ 有两个特点：

1. 它是一个完整的量，在特定坐标参考系内有确定数目的分量. 分量数目 $n=3^1$，3 表示 $\vec{V}$ 是在三维空间内定义的向量.

2. 当坐标变换时，它的分量有如(A-49)的变换关系，故称之为一秩变换关系.

现在我们再考虑一个新的量

$$\vec{\vec{\Phi}}=\Phi_{ij}^b b_i b_j \quad i,j=1-3 \tag{A-50}$$

b_ib_j 是 $\underset{\sim}{b}$ 参考系的两个基向量，注意它们只是简单地并排而列，中间没有运算符号. (b_ib_j) 称为并矢 Dyad，而 $\vec{\vec{\Phi}}$ 称为并矢张量 Dyadic. Φ_{ij}^b 是并矢张量 $\vec{\vec{\Phi}}$ 在 $\underset{\sim}{b}$ 参考系内的分量. 注意，根据求和规约，(A-50)事实上相当于

$$\vec{\vec{\Phi}}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\Phi_{ij}^b b_i b_j \tag{A-51}$$

所以，$\vec{\vec{\Phi}}$ 共有 9 个分量，即 $n=3^2=9$. 又(A-50)或(A-51)又可以用矩阵形式写作

$$\vec{\vec{\Phi}}=\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{\Phi}_b\underset{\sim}{b} \tag{A-52}$$

式中 $\underset{\sim}{\Phi}_b$ 是以 Φ_{ij}^b 为元素的矩阵，即

$$\underset{\sim}{\Phi}_b=\begin{bmatrix}\Phi_{11}^b & \Phi_{12}^b & \Phi_{13}^b\\ \Phi_{21}^b & \Phi_{22}^b & \Phi_{23}^b\\ \Phi_{31}^b & \Phi_{32}^b & \Phi_{33}^b\end{bmatrix} \tag{A-53}$$

现在令这个并矢张量 $\vec{\vec{\Phi}}$ 在新坐标参考系 $\underset{\sim}{a}^T=(a_1,a_2,a_3)$ 内表达为

$$\vec{\vec{\Phi}}=\underset{\sim}{a}^T\underset{\sim}{\Phi}_a\underset{\sim}{a} \tag{A-54}$$

将(A-46)代入(A-52)，得

$$\vec{\vec{\Phi}} = \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{A}_{ab} \underset{\sim}{\Phi}_b \underset{\sim}{A}_{ba} \underset{\sim}{a} \tag{A-55}$$

这里，由(A-8)知

$$\underset{\sim}{A}_{ba} = (\underset{\sim}{A}_{ab})^T. \tag{A-56}$$

对比(A-55)与(A-54)可有

$$\underset{\sim}{\Phi}_a = \underset{\sim}{A}_{ab} \underset{\sim}{\Phi}_b \underset{\sim}{A}_{ba} \tag{A-57}$$

由(A-57)式可得如下的下标形式方程：

$$\Phi^{\alpha}_{ij} = A^{ip}_{ab} A^{ab}_{jk} \Phi^{b}_{pk} \tag{A-58}$$

这是并矢张量$\vec{\vec{\Phi}}$的分量在坐标变换时的变换关系. 注意式中有 p,k 两个求和指标(重复指标). 这一变换关系又称之为二秩变换关系. 就是说变换时要乘两次变换系数(变换矩阵的元素).

这样，并矢张量$\vec{\vec{\Phi}}$有与向量相近的两个特点，即

1. 它是一个完整的量，在特定坐标参考系内，有确定数目的分量，$n=3^2$.

2. 当坐标变换时，它的分量有如(A-57)的变换关系，即所谓二秩变换关系.

并矢张量可以和向量作点积和叉积. 如

$$\vec{\vec{\Phi}} \cdot \vec{\omega} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\Phi} \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{b}^T (\underset{\sim}{\Phi}\, \underset{\sim}{\omega}) \tag{A-59}$$

可见其积为一个向量.

$$\vec{\omega} \times \vec{\vec{\Phi}} = \underset{\sim}{\omega}^T \underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\Phi}\, \underset{\sim}{b} = - \underset{\sim}{\omega}\, \underset{\sim}{\tilde{b}}\, \underset{\sim}{\Phi}\, b = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{\tilde{\omega}}\, \underset{\sim}{\Phi}\, \underset{\sim}{b} \tag{A-60}$$

可见其积仍为一个并矢张量.

由此，倘定义

$$\vec{\vec{I}} = \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{I}\, \underset{\sim}{b}^T \tag{A-61}$$

为单位并矢张量，则显然有

$$\vec{\vec{I}} \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \tag{A-62}$$

作为并矢张量的一个应用，我们进行下列运算：

$$\vec{T} = \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \tag{A-63}$$

利用著名的向量三重积公式：

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}\,(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}\,(\vec{A} \cdot \vec{B}) \tag{A-64}$$

则(A-63)式变成

$$\vec{T} = (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})\vec{\omega} - \vec{\rho}\,(\vec{\rho} \cdot \vec{\omega})$$

将(A-62)代入上式，得

$$\begin{aligned} \vec{T} &= (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})\vec{\vec{I}} \cdot \vec{\omega} - \vec{\rho}\,\vec{\rho} \cdot \vec{\omega} \\ &= [((\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})\vec{\vec{I}} - \vec{\rho}\,\vec{\rho})] \cdot \vec{\omega} \end{aligned} \tag{A-65}$$

在上式中方括号内第一项，由于$(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})$是个标量，因此$(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})\vec{\vec{I}}$是一个并矢张量，第二项$\vec{\rho}\,\vec{\rho}$是由向量$\vec{\rho}$并列而得，因而也是一个并矢张量，方括号既是两个并矢张量之和当然还是一个并矢张量，记作

$$\overrightarrow{\overrightarrow{J}} = (\vec{\rho}\cdot\vec{\rho})\overrightarrow{\overrightarrow{I}} - \vec{\rho}\,\vec{\rho} \tag{A-66}$$

并称之为惯矩并矢张量[1)]，这样

$$\vec{T} = \vec{J}\cdot\vec{\omega} \tag{A-67}$$

(A-66)中的第一项中的$\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}$称为两个向量的点积(又称内积)

$$\vec{\rho}\cdot\vec{\rho} = \underset{\sim}{\rho}^T\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{\rho} = \underset{\sim}{\rho}^T\underset{\sim}{\rho}$$

其积是个标量；(A-66)中的第二项，称为两个向量的外积，

$$\vec{\rho}\,\vec{\rho} = \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{\rho}\,\underset{\sim}{\rho}^T\underset{\sim}{b} \tag{A-68}$$

其积是一个并矢张量. 倘若记$\overrightarrow{\overrightarrow{C}} = \vec{\rho}\,\vec{\rho} = \underset{\sim}{b}^T\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{b}$则有

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{\rho}\,\underset{\sim}{\rho}^T \tag{A-69}$$

注意$\underset{\sim}{\rho}$是一个列阵，则$\underset{\sim}{C}$的元素C_{ij}应为

$$C_{ij} = \rho_i\rho_j \tag{A-70}$$

---

1)事实上，按定义

$$\overrightarrow{\overrightarrow{J}} = \int_B((\vec{\rho}\cdot\vec{\rho})\overrightarrow{\overrightarrow{I}} - \vec{\rho}\,\vec{\rho})dm$$

和这里的(A-66)式只差一个积分运算，但不影响作为并矢张量的本质特点.

附录 B　关于结构动力学的一些基本概念

§1. 引　　言

结构动力学是多柔体系统动力学的重要基础这一. 为了说明一些基本概念，我们以图 B-1的质量-弹簧系统为例，先建立它的基本方程，再讨论有关的概念及其应用.

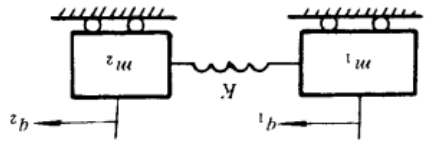


图 B-1　简单机械系统

建立振动基本方程的方法很多，常用的方法之一是 Lagrange 方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{B-1}$$

其中，L 是 Lagrange 函数：

$$L = T - U \tag{B-2}$$

而 T 和 U 分别是系统的动能和弹性应变能. 令质量块 m_1 和 m_2 的位移分别为 q_1 和 q_2，对应的速度为 $\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}$ 和 $\dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}$，这样动能为

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2) = \frac{1}{2}\dot{\underset{\sim}{q}}^T \underset{\sim}{M}\,\dot{\underset{\sim}{q}} \tag{B-3}$$

其中 $\dot{\underset{\sim}{q}}^T = (\dot{q}_1\ \dot{q}_2)$ 称为广义速度，而 $\underset{\sim}{M}$ 在本例中为

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

称为质量阵或惯性矩阵；弹性应变能为

$$U = \frac{1}{2}k(q_2 - q_1)^2 = \frac{1}{2}k(q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2) = \frac{1}{2}\underset{\sim}{q}^T \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{q} \tag{B-4}$$

其中 $\underset{\sim}{q}^T = (q_1, q_2)$；而 $\underset{\sim}{K}$ 为

$$\underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

称为刚度矩阵. 对于动能，无论速度是正还是负，无论它是弹性振动引起的还是刚体运动引起的，都使动能有正值. 因此质量阵 $\underset{\sim}{M}$ 是正定的. 对于弹性应变能 U，情况就不一样

了．当系统可以发生刚体运动时，(例如在本例中 $q_1 = q_2$)，弹性应变能为零．因此，刚度矩阵 $\underset{\sim}{K}$ 不一定是正定的，只当结构是固定的(无刚体位移时)，刚度矩阵 $\underset{\sim}{K}$ 才是正定的．

将(B-2)—(B-4)代入(B-1)，可得振动的基本方程

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{Q} \tag{B-5}$$

当外力 $\underset{\sim}{Q} = 0$ 时，得自由振动方程

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{q} = 0 \tag{B-6}$$

它的解，即(B-5)的齐次解，可表示为

$$\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{\Phi}\cos(\omega t - \psi) \tag{B-7}$$

$\underset{\sim}{q}$ 为自由响应，$\underset{\sim}{\Phi}$ 为振辐，ω 为振动圆频率，ψ 为相位角．(B-7) 表示在自由振动时，各点(在本例中为 m_1 和 m_2) 以不同振辐 $\underset{\sim}{\Phi}^T = (\Phi_1, \Phi_2)$，但以相同的频率 ω 和相位角 ψ 运动．在相位角 ψ 为零时由(B-7)可得

$$\ddot{\underset{\sim}{q}} = -\omega^2\underset{\sim}{\Phi}\cos\omega t \tag{B-8}$$

因而代入(B-6)式后，得

$$\omega^2\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{\Phi} - \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{\Phi} = 0 \tag{B-9}$$

(B-9)式在数学上称为广义特征值问题，其中

$$\mu = \omega^2 \tag{B-10}$$

称为特征值，$\underset{\sim}{\Phi}$ 称为与之对应的特征向量，两者又合称为特征对．对于 n 维自由度系统(即 $\underset{\sim}{q}$，因而 $\underset{\sim}{\Phi}$ 是 n 维列阵时)，(B-9)式共有 n 个特征值，按照由小到大的顺序依次记作 $\omega_1^2 < \omega_2^2 \cdots < \omega_i^2 \cdots < \omega_n^2$．对应的有 n 个特征向量 $\underset{\sim}{\Phi}_i$，$(i = 1, \cdots, n)$：

$$\omega_i^2\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{\Phi}_i - \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{\Phi}_i = 0 \tag{B-11}$$

在振动中称与 n 个特征值 λ_i 对应的 ω_i 为振动的固有圆频率(自振圆频率、也简称圆频率)，而将 $f = \omega/2\pi$ 称为固有频率．圆频率 ω 的单位是 rad/s(弧度/秒)，固有频率 f 的单位是 Hz，物理意义是每秒振动一次．特征向量 $\underset{\sim}{\Phi}_i$ 称为与 $\lambda_i = \omega_i^2$ 对应的固有振型(或固有模态、也简称振型或模态)．

模态有两个最重要的特点，即完备性和正交性．完备性是说对于 n 维(n 个自由度) 系统，应有 n 个独立的模态．正交性则可表示为

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{\Phi}_j = \underset{\sim}{\Phi}_j^T\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{\Phi}_i = a_i\delta_{ij} \\
&\underset{\sim}{\Phi}_i^T\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{\Phi}_j = \underset{\sim}{\Phi}_j^T\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{\Phi}_i = b_i\delta_{ij} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)
\end{aligned} \tag{B-12}$$

其中 δ_{ij} 称为 Kronecker delta，定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j; \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

而 a_i 称为模态质量，b_i 称为模态频率，且有

$$\omega_i^2 = b_i/a_i \tag{B-13}$$

正交性的证明可参看振动理论方面的书籍．

又倘若令

$$\underset{\sim}{T}_i = \underset{\sim}{\Phi}_i/\sqrt{a_i} \tag{B-14}$$

则 $\underset{\sim}{T}_i$ 称为规格化(Normalized，又译作归一化或标准化)模态．此时正交条件(B-12)变成

$$\underset{\sim}{T}_i\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}_j=\underset{\sim}{T}_j^T\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}_i=\delta_{ij}$$
$$\underset{\sim}{T}_i^T\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{T}_j=\underset{\sim}{T}_j^T\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{T}_i=\omega_i^2\delta_{ij}\qquad(i=1,\cdots,n)\qquad(B-15)$$

这称为模态的规格化正交条件. (B-15)式还可以用矩阵形式写作

$$\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{I}$$
$$\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{\Lambda}\qquad(B-16)$$

这里 $\underset{\sim}{T}=[\underset{\sim}{T}_1,\underset{\sim}{T}_2,\cdots,\underset{\sim}{T}_k,\underset{\sim}{T}_n]$ 是以规格化模态 $\underset{\sim}{T}_k$ 作为列子阵组成的模态阵；$\underset{\sim}{I}$ 是$(n\times n)$单位方阵；而 $\underset{\sim}{\Lambda}$ 是以 ω_k^2 为主元的对角方阵.

最后说明，倘 $\underset{\sim}{q}$ 的元素的量纲是长度 l(更一般说是广义位移)，因而 $\underset{\sim}{\Phi}$ 的元素的量纲也是长度 l；$\underset{\sim}{M}$ 的元素的量纲是质量 m，(更一般说是广义质量)，则由(B-12)可知 a_i 的元素的量纲就是 ml^2；因而由(B-15)可知规格化模态 $\underset{\sim}{T}$ 的元素的量纲就是 $l/\sqrt{m}$，即为广义质量的量纲的平方根除广义位移.

在本节最后，我们给出连续弹性体的模态的正规正交化条件：

$$\int_B\vec{T}_i\cdot\vec{T}_j dm=\delta_{ij}\qquad(B-17a)$$

或

$$\int\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{T}\,dm=\underset{\sim}{I}\qquad(B-17b)$$

式中 dm 是弹性体 B 的任一微元质量，$\underset{\sim}{T}_i$ 是该微元质量处的模态向量；$\underset{\sim}{T}=(\underset{\sim}{T}_1,\underset{\sim}{T}_2,\cdots,\underset{\sim}{T}_k,\cdots)$ 是由 T_i 组成的模态阵. 它的推导可参看任何关于振动理论专著.

§2. 模态展开

现在回到(B-5)式，即

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{q}}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{q}=\underset{\sim}{Q}\qquad(B-5)$$

它又称为受迫振动基本方程，$\underset{\sim}{Q}$ 是已知的外力. q 称为受迫响应(简称响应).

由于 $\underset{\sim}{q}$ 的阶数很高，而且一般讲 $\underset{\sim}{M}$ 与 $\underset{\sim}{K}$ 都不一定是对角阵，就是说它们一般是相互耦合的，因此，要直接进行数值积分是十分困难的. 此外，为了给控制系统设计提供动力学的模型，也需要低阶的动力学方程. 降阶的一个重要方法就是采用模态展开. 就是说将响应(振动位移)$q(t)$ 表达为固有模态的线性组合，即令

$$\underset{\sim}{q}(t)=\sum_{i=1}^{m}T_i\tau_i(t)=\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{\tau}\qquad(B-18)$$

式中 $\underset{\sim}{T}$ 是规格化模态阵，$\underset{\sim}{\tau}^T=(\tau_1,\cdots,\tau_k,\cdots,\tau_m)$ 称为模态坐标阵. $\tau_i(t)$ 表示模态坐标是随时间变化的. 在这里 $m\leqslant n$. 倘取 $m=n$ 这种表达是精确的，这是由于 $\underset{\sim}{T}_i$ 是 n 维空间中的 n 组完备独立向量，它的线性组合可以完全地表达一个 n 维空间的向量 $\underset{\sim}{q}$. 倘取 $m<n$，就意味着以 n 维空间的一个 m 维子空间内的投影近似表达 $\underset{\sim}{q}$. 如何选取子空间是需要一些考虑的，就是说需要有模态截断准则. 对于多柔体系统动力学，将在本书第四章内讨论.

将(B-18)式代入(B-5)式，再对全式前乘以 $\underset{\sim}{T}^T$，则可得到

$$\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{T}\,\ddot{\underset{\sim}{\tau}}+\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{\tau}=\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{Q}$$

注意模态的规格正交条件(B-16),并令

$$\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{Q}=\underset{\sim}{F} \tag{B-19}$$

可得

$$\ddot{\underset{\sim}{\tau}}+\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\tau}=\underset{\sim}{F} \tag{B-20}$$

这是以模态坐标表示的受迫振动方程. 注意 $\underset{\sim}{\Lambda}$ 是以 ω_i^2 为主元的对角阵,则(B-20)式又可以表达为

$$\ddot{\tau}_i+\omega_i^2\tau_i=F_i \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{B-21}$$

这是一组互不耦合的单未知量的二阶常微分方程组,而且倘若选截适当,可使(B-18)式中的项数 $m<n$. 这样求解时当然十分方便. 因此,对于无阻尼的结构的受迫振动问题,采用模态展开,可以兼得解耦与降阶之效.

现在再考虑有阻尼的系统,它的一般方程为[121]

$$\underset{\sim}{M}\,\ddot{\underset{\sim}{q}}+\underset{\sim}{C}\,\dot{\underset{\sim}{q}}+\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{q}=\underset{\sim}{Q}$$

式中 $\underset{\sim}{C}$ 为阻尼矩阵. 仍以无阻尼时的模态表达响应 $\underset{\sim}{q}$,则可得

$$\ddot{\underset{\sim}{\tau}}+\underset{\sim}{D}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}}+\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\tau}=\underset{\sim}{F} \tag{B-22}$$

这里

$$\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{T} \tag{B-23}$$

称为模态阻尼,一般讲不一定能够化为对角阵. 倘若能化为对角阵(例如比例阻尼情况),则可有

$$\ddot{\tau}_i+D_i\dot{\tau}_i+\omega_i^2\tau_i=F_i \qquad i=1,2,\cdots,m$$

在工程上,很多情况都假设为比例阻尼情况.

现在考虑在比例阻尼时(B-22)式中 $F_i=0$ 的情况. 这是有阻尼系统的自由振动方程:

$$\ddot{\tau}_i+D_i\dot{\tau}+\omega_i^2\tau_i=0 \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{B-24a}$$

或

$$\ddot{\underset{\sim}{\tau}}+\underset{\sim}{D}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}}+\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\tau}=0 \tag{B-24b}$$

倘引入阻尼因子(模态阻尼因子)

$$\xi_i=D_i/2\omega_i \tag{B-25}$$

则(B-24a)式变成

$$\ddot{\tau}_i+2\omega_i\xi_i\dot{\tau}_i+\omega_i^2\tau=0$$

倘令

$$\tau_i=e^{\lambda_i t}$$

并代入上式,得对应的特征方程:

$$\lambda_i^2+2\omega_i\xi_i\lambda_i+\omega_i^2=0$$

解之得

$$\lambda_i=\frac{-2\omega_i\xi_i\pm\sqrt{4\omega_i^2\xi_i^2-4\omega_i^2}}{2}=-\omega_i\xi_i\pm\omega_i\sqrt{\xi_i^2-1}$$

倘若系统是小阻尼系统，即 $0 \leqslant \xi_i \leqslant 1$，则上式两个根又可写作

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i &= -\omega_i\xi_i + j\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2} \\ \lambda_i^* &= -\omega_i\xi_i - j\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2} \end{aligned}\right\} \tag{B-26}$$

其中 $j=\sqrt{-1}$，而 ω_i 是无阻尼时的固有圆频率．λ_i^* 是 λ_i 的共轭数．λ_i 和 λ_i^* 称为有阻尼（小阻尼）系统的固有圆频率．

如果注意(B-24)式，它共有 m 阶（若保留 m 个无阻尼模态），因而也有 m 组特征向量，注意 τ_i 相互无关，这样它的对应于 $\underset{\sim}{\tau}$ 的特征向量阵 $\underset{\sim}{h}_{11}$ 是单位方阵 $\underset{\sim}{I}$．这就是说阻尼只改变频率值，不改变用物理坐标 $\underset{\sim}{q}$ 表示的模态．

§3. 用模态坐标表达的结构动能和弹性变形能

将(B-18)代入(B-3)和(B-4)可得，结构动能的模态坐标表达式为

$$T = \frac{1}{2}\dot{\underset{\sim}{\tau}}^T\dot{\underset{\sim}{\tau}} \tag{B-27a}$$

以模态坐标表达的弹性变形能 U 为

$$U = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\tau}^T\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\tau} \tag{B-27b}$$

§4. 振动方程的状态方程表达式

仍考虑一个有阻尼的振动系统，它的振动基本方程为

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{C}\dot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{Q} \tag{B-28}$$

在上式中，$\underset{\sim}{q}$ 又称为位形变量（广义位移）．由 $\underset{\sim}{q}$ 构成位形空间．模态展开法是用位形空间的子空间来近似表达响应．

在振动中还定义

$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{q} \\ \dot{\underset{\sim}{q}} \end{pmatrix} \tag{B-29}$$

并称之为状态变量，状态变量组成的空间又称为状态空间，在非线性振动中又称为相空间．状态变量包括了广义位移及广义速度，因此它能更完全地说明运动状态．

为求状态方程，可引入

$$\dot{\underset{\sim}{q}} = \underset{\sim}{0}\,\underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{I}\,\dot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{0}\,\underset{\sim}{Q}$$

并由(B-28)给出

$$\ddot{\underset{\sim}{q}} = -\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{C}\,\dot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{Q}$$

上两式合并，可有

$$\begin{pmatrix} \dot{\underset{\sim}{q}} \\ \ddot{\underset{\sim}{q}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} \\ -\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K} & -\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{C} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \underset{\sim}{q} \\ \dot{\underset{\sim}{q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{Q} \end{pmatrix} \tag{B-30}$$

或

$$\dot{\underset{\sim}{X}}=\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{F} \tag{B-31}$$

其中

$$\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I}\\ -\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K} & -\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{C}\end{bmatrix} \tag{B-32}$$

$$\underset{\sim}{F}=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{Q}\end{pmatrix} \tag{B-33}$$

(B-31)式称为振动的状态方程.

将状态方程用于控制时,(B-31)的外力项常写作

$$\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{w} \tag{B-34}$$

其中 $\underset{\sim}{B}$ 是控制矩阵,表示控制力分布情况,控制力由执行器实现,因此 $\underset{\sim}{B}$ 表示执行器的分布;$\underset{\sim}{u}$ 称为控制变量,在设计时是待定的;$\underset{\sim}{w}$ 是外界干扰. 于是(B-31)式变成

$$\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{A}\,\dot{\underset{\sim}{X}}+\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{w} \tag{B-35}$$

此外,还根据传感器的类型及布局有观测方程

$$\underset{\sim}{Y}=\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{X} \tag{B-36}$$

$\underset{\sim}{Y}$为观测变量;$\underset{\sim}{C}$为观测矩阵,与传感器的类型及其布局有关.

控制变量 $\underset{\sim}{u}$ 由所谓的控制律给出,对于闭环控制其一般形式为

$$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{X} \tag{B-37}$$

$\underset{\sim}{G}$称为增益阵,由控制系统设计时定出,确定的方法之一是根据最优控制理论.

§5. 状态方程的特征值问题

现在考虑无外力时 ($F=0$) 状态方程

$$\dot{\underset{\sim}{X}}=\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X} \tag{B-38}$$

的特征值问题. 一般讲 $\underset{\sim}{A}$ 不是对称的,更一般情况,$\underset{\sim}{A}$ 是复数阵.

引入

$$\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{h}_i e^{\lambda_i t}$$

则可有

$$\lambda_i\underset{\sim}{h}_i=\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{h}_i \tag{B-39}$$

λ_i 称为 $\underset{\sim}{A}$的特征值,$\underset{\sim}{h}_i$ 列阵称为 $\underset{\sim}{A}$的右乘特征向量. 显然,这里还可有

$$\lambda_i\underset{\sim}{f}_i=\underset{\sim}{f}_i\underset{\sim}{A} \tag{B-40}$$

$\underset{\sim}{f}_i$ 是一个行阵(行向量),称为 $\underset{\sim}{A}$的左乘特征向量. 倘若 $\underset{\sim}{A}$是实数对称阵,即 $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}^T$,则容易证明,对同一特征值 λ_i,

$$\underset{\sim}{f}_i=\underset{\sim}{h}_i^T \tag{B-41}$$

但对于非对称的 $\underset{\sim}{A}$阵,同时有一个右乘特征向量 $\underset{\sim}{h}_i$(它在B-39式中右乘于 $\underset{\sim}{A}$矩阵)和一个左乘特征向量 $\underset{\sim}{f}_i$(它在B-40式中左乘于 $\underset{\sim}{A}$矩阵). 这时,特征向量的正交条件为

$$\underset{\sim}{f}_i\underset{\sim}{h}_j=\delta_{ij}\qquad 或\qquad \underset{\sim}{f}\,\underset{\sim}{h}=\underset{\sim}{I} \tag{B-42}$$

其中 $\underset{\sim}{h}=(\underset{\sim}{h}_1,\underset{\sim}{h}_2,\cdots,\underset{\sim}{h}_m)$ 称为右乘特征向量阵；而 $\underset{\sim}{f}^T=(\underset{\sim}{f}_1^T,\underset{\sim}{f}_2^T,\cdots,\underset{\sim}{f}_m^T)$ 称为左乘特征向量阵. 可以证明规格化条件为

$$\underset{\sim}{f}_i\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{h}_j=\delta_{ij}\lambda_i \text{ 或 } \underset{\sim}{f}\,\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{h}=\underset{\sim}{\Lambda}=diag\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\} \tag{B-43}$$

如果 $\underset{\sim}{A}$ 是复数矩阵，则对于它的共轭转置阵 $\underset{\sim}{A}^*$，也有

$$\lambda_i^*\underset{\sim}{h}_i^*=\underset{\sim}{h}_i^*\underset{\sim}{A}^* \tag{B-44}$$

$$\lambda_j^*\underset{\sim}{f}_j^*=\underset{\sim}{A}^*\underset{\sim}{f}_j^* \tag{B-45}$$

$\underset{\sim}{h}_j^*$（现在是列阵），$\underset{\sim}{f}_j^*$（现在是列阵）现在分别是 $\underset{\sim}{A}^*$ 的左乘特征向量和右乘特征向量. 这时的正交规格化条件是

$$\underset{\sim}{h}_i^*\underset{\sim}{f}_j^*=\delta_{ij} \text{ 或 } \underset{\sim}{h}^*\underset{\sim}{f}^*=\underset{\sim}{I} \tag{B-46}$$

$$\underset{\sim}{h}_i^*\underset{\sim}{A}^*\underset{\sim}{f}^*=\lambda_i^*\delta_{ij} \tag{B-47}$$

最后，再讨论由(B-22)写成的模态坐标下的状态方程，模态坐标 $\underset{\sim}{\tau}$ 下的振动方程为

$$\ddot{\underset{\sim}{\tau}}+\underset{\sim}{D}\,\dot{\underset{\sim}{\tau}}+\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{\tau}=0$$

$\underset{\sim}{D}$ 和 $\underset{\sim}{\Lambda}$ 都是对角阵. 相应的状态方程

$$\dot{\underset{\sim}{X}}=\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X} \tag{B-48}$$

中，$\underset{\sim}{X}=(\dot{\underset{\sim}{\tau}}^T,\underset{\sim}{\tau}^T)^T$，而状态矩阵为

$$\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I}\\ -\underset{\sim}{\Lambda} & -\underset{\sim}{D}\end{bmatrix} \tag{B-49}$$

此时，$\underset{\sim}{A}$ 的特征值共有 $2m$ 个（当 $\underset{\sim}{\tau}$ 是 m 维列阵时），且两两共轭，即

$$\lambda_k=\lambda_{kR}+j\lambda_{kI},\qquad \lambda_k^*=\lambda_{kR}-j\lambda_{kI},\qquad k=1,2,\cdots,m \tag{B-50}$$

其中 λ_{kR} 和 λ_{kI} 分别是特征值 λ_k 的实部和虚部. 读者试与第二节的(B-26)比较. 令

$$\underset{\sim}{\Lambda}_{CI}=\mathrm{diag}\{\lambda_{1I},\cdots,\lambda_{kI},\cdots,\lambda_{mI}\}$$

$$\underset{\sim}{\Lambda}_{CR}=\mathrm{diag}\{\lambda_{1R},\cdots,\lambda_{kR},\cdots,\lambda_{mR}\}$$

于是

$$\underset{\sim}{\Lambda}=\underset{\sim}{\Lambda}_{CR}+j\underset{\sim}{\Lambda}_{CI},\qquad \underset{\sim}{\Lambda}^*=\underset{\sim}{\Lambda}_{CR}-j\underset{\sim}{\Lambda}_{CI}$$

$$\underset{\sim}{\Lambda}_\Sigma=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{\Lambda}\\ \underset{\sim}{\Lambda}^*\end{Bmatrix}$$

由第二节已知，对应于模态坐标 $\underset{\sim}{\tau}$ 的右乘特征向量 $\underset{\sim}{h}_{11}=\underset{\sim}{I}$. 再注意 $\dot{\underset{\sim}{\tau}}=\lambda\underset{\sim}{\tau}$，因而与模态坐标的时间导数对应的那部分右乘特征向量就是 $\underset{\sim}{h}_{21}=\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{h}_{11}=\underset{\sim}{\Lambda}$. 另外对应于 $\underset{\sim}{\Lambda}^*$ 同样有 $\underset{\sim}{h}_{12}=\underset{\sim}{I}$ 和 $\underset{\sim}{h}_{22}=\underset{\sim}{\Lambda}^*\underset{\sim}{h}_{12}=\underset{\sim}{\Lambda}^*$. 这样对应于 $\underset{\sim}{\Lambda}_\Sigma=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{\Lambda}\\ \underset{\sim}{\Lambda}^*\end{pmatrix}$ 的以状态变量 $\underset{\sim}{X}^T=(\underset{\sim}{\tau}^T,\dot{\underset{\sim}{\tau}}^T)$ 表示的右乘特征向量就是

$$\underset{\sim}{h}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{h}_{11} & \underset{\sim}{h}_{12}\\ \underset{\sim}{h}_{21} & \underset{\sim}{h}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{I}\\ \underset{\sim}{\Lambda} & \underset{\sim}{\Lambda}^*\end{bmatrix} \tag{B-51}$$

容易证明

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{h}=\underset{\sim}{h}\,\underset{\sim}{\Lambda}_\Sigma \quad 或 \quad \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{h}_k=\lambda_k\underset{\sim}{h}_k \quad 和 \quad \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{h}_{k+m}=\lambda_k^*\underset{\sim}{h}_{k+m} \tag{B-52}$$

这就是说 $\underset{\sim}{h}$ 的第 k 列 $\underset{\sim}{h}_k$ 和第$(k+m)$ 列 $\underset{\sim}{h}_{k+m}$ 分别是

$$\underset{\sim}{h}_k^T = [0,0,\cdots,1,0,0,0,\cdots,\lambda_k,0,0,\cdots,0]$$

$$\underset{\sim}{h}_{k+m}^T = [0,0,\cdots,1,0,0,\cdots,0,\lambda_k^*,0,\cdots,0]$$

$\underset{\sim}{A}$ 的左乘特征向量 $\underset{\sim}{f}$，根据(B－42) 可由 $\underset{\sim}{h}$ 的逆矩阵求出为

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{h}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{j}{2}\underset{\sim}{\Lambda}_{CI}^{-1}\underset{\sim}{\Lambda}^* & -\frac{j}{2}\underset{\sim}{\Lambda}_{CI}^{-1} \\ -\frac{j}{2}\underset{\sim}{\Lambda}_{CI}\underset{\sim}{\Lambda} & +\frac{j}{2}\underset{\sim}{\Lambda}_{CI}^{-1} \end{bmatrix} = \frac{j}{2}\underset{\sim}{\Lambda}_{CI}^{-1}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Lambda}_I^* & -\underset{\sim}{I} \\ -\underset{\sim}{\Lambda} & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} \qquad \text{(B－53)}$$

当然 $\underset{\sim}{f}$ 的第 k 行 $\underset{\sim}{f}_k$ 和第 $k+m$ 行 $\underset{\sim}{f}_{k+m}$ 是对应于 λ_k 和 λ_k^* 的左乘特征向量. 它的形式为

$$\underset{\sim}{f}_k = [0,\cdots,f_{kk}^*,\cdots,0 \quad 0,\cdots,f_{k,k+m},0,\cdots,0]_0 \qquad \text{(B－54)}$$

$$\underset{\sim}{f}_{k+m} = [0,\cdots,f_{k+m,k},0,\cdots,f_{k+m,k+m},0,\cdots,0]$$

至于 $\underset{\sim}{f}^*$ 则是 $\underset{\sim}{f}$ 的共轭转置阵，

$$\underset{\sim}{f}^* = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Lambda} & -\underset{\sim}{\Lambda}^* \\ -\underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix}\left(-\frac{j}{2}\underset{\sim}{\Lambda}_{CI}^{-T}\right) \qquad \text{(B－55)}$$

式中 $\underset{\sim}{\Lambda}_{CI}^{-T}$ 是实矩阵 $\underset{\sim}{\Lambda}_{CI}^{-1}$ 的转置阵.

参 考 文 献

[1] Agrawal, O. P. et. al., Dynamic Analysis of Multibody Systems Using Component Modes, *Computers and Structures*, 21(6),1985.

[2] Agrawal, O. P. and Saigal, S., Dynamic Analysis of Multibody Systems Using Tangent Coordinates, *Computers and Structures*, 31(3),1989,349－355.

[3] Agrawal, O. P. and Shabana, A. A., Application of Deformable Body Mean Axis to Flexible Multibody System Dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 55, 1986,217－245.

[4] Amirouche, F. M. L. and Huston, R. L., Dynamics of Large Constrained Flexible Structures, *ASME J. Dynamic Systems, Measurements and Control*, 110(1),1988, 78－83.

[5] Amirouche, F. M. L., Jia, T. Y. and Ider, S. K., A Recursive Householder Transformation for Complex Dynamical Systems with Constrains, *J Applied Mechanics*, 55(3), 1988. 729－734.

[6] Asada, H., Ma, Z. D. and Tokumara, H., Inverse Dynamics of Flexible Robot Arms: Modelling and Computation for Trajectory Control, *ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 12, 1990, 177－185.

[7] Aspinwall, D. M., Acceleration Profiles for Minimizing Residual Response, *ASME. J. Dynamic Systems, Measurements and Control*, 102(1),1980,3－6.

[8] Bae, D. S. and Haug, E. J., A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics:
Part 1, Open Loop System, *Mech. Structures and Machines*, 15(3), 1987,359－382.
Part 2, Closed Loop System, *Mech. Structures and Machines*, 15(4), 1987, 481－506.
Part 3, Parallel Processor Implementation, *Mech. Structures and Machines*, 16(2), 1988, 249－269.

[9] Bayo, E. Moraghar, and Medus, M., Inverse Dynamics of a Single Link Flexible Robot-Analytical and Experimental Results, *Int. J. Robotics and Automation*, 3(13),1988,150－157.
(1) Bayo, E., A Finite-Element Approach to Control the End-Point Motion of a Single-Link Flexible Robot, *J. of Robotic Systems*, 4(1),1987,63－75.
(2) Bayo, E., Computed Torque for the Position Control of Open Chain Flexible Robots, IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 1988, 316－321.
(3) Bayo, E., Computed Torque for the Position Control of Close Chain Flexible Robots, *Int. J. of Robotics and Automation*, 4, (5), 1989.
(4) Serna, M. A., Bayo, E., Off-Line Trajectory Planning for Flexible Manipulators, Proc. of IFIP Int. Conf, Modelling the Innovation, Roma, 1990.
(5) Bayo, E. et al., Inverse Dynamics and Kinematics of Multilink Elastic Robots: An Iterative Frequency Domain Approach, *The Int. J. of Robotic Research*, 8(6), 1989, 49－62.

[10] Bodley, C. S. et. al., A Digital Computer Program for The Dynamic Interaction Simulation of Controls and Structure (DISCOS), 112, NASA TP-1219,1978.

[11] Benhabib, B. and Tabareh, E., Optimal Joint Trajectory Planning for Coordinated Point-to-Point Motion of Two-Arm Manipulators, *Mech. Mach. Theory*, 24(1),1989,9-17.

[12] Book, W. J., Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms, *Int. J. Robotics Research*, 3(9), 1984, 87－101.

[13] Butcher, J. C., Implicit Runge-Kutta Processes, *Math. Comp.*, 18, 1964, 50－64.

[14] Cavin, R. K. and Dusto, A. R., Hamilton's Principle: Finite Element Methods and Flexible Body Dynamics, *AIAA J.*, 15(12),1977, 1684－1690.

[15] Chaelna, B. and Agrawal, O. P., Dynamic Analysis of Flexible Multibody Systems Using Mixed Modal and

Tangent Coordinates, *Computers and Structures*, 31(6),1989,1041－1050.

[16] Chapnik, B. V., et. al., Controlling the Impact Respense of a Link Flexible Robotic Arm, Proc. 1990 IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, 1990,1444－1449.

[17] Christian, A. D. and Seeing, W. P., Initial Experiments with a Flexible Robot, Proc. 1990 IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, 1990, 722－727.

[18] Dekker, K. and Verwer, J., Stability of Runge-Kutta Method for Stiff Nonlinear Differential Equations, Oxford, North Holland Publ. Comp., 1984.

[19] Fisette, P., Samin, C. L. and Willems, P. Y., Contribution to Symbolic Analysis of Deformable Multi-Body Systems, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 32, 1991, 1621－1635.

[20] Fletcher, H. J., Rongved, L. and Yu, E. Y., Dynamics Analysis of a Two-Body Gravitationally Oriented Satellite, *Bell System Tech. J.*, 42(5), 1963, 2239－2266.

[21] Friberg, O. A., Method for Selecting Deformation Modes in Flexible Multibody Dynamics, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 32, 1991, 1637－1655.

[22] Frisch, H. P., A Vector-Dyadic Development of the Equations of Motion for N-Coupled Flexible Bodies and Point Masses, NASA TND-8047, 1975.

[23] Gawronski, W. and Williams, T., Model Reduction for Flexible Structure, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 14(1), 1991, 68－76.

[24] Gear, C. W., Algorithm 407, DIFSUB for Solution of Ordinary Differential Equations, Comm. ACM, 14, 1971, 185－190.

[25] Gregory, C. Z., Reduction of Large Flexible Spacecraft Models Using Internal Balancing Theory, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 7(6), 1984, 725－732.

[26] Hablani, H. B., Modal Identities for Multibody Elastic Spacecraft, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 14 (2),1991, 294－303.

[27] Hayati, S. et. al., Dual Arm Coordination and Control, *North-Holland Robotics and Autonomous Systems*, 5, 1989, 333－344.

[28] Ho, J. Y. L., Development of Dynamics and Control Simulation of Large Flexible Space System, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 8(3), 1985, 374－383.

[29] Hollerbach, J. M., A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dymamics and A Comparative Study of Dynamic Formulation Complexity, *IEEE Trans. on System, Man and Cybernetics*, SMC-10(11), 1980, 730 －736.

[30] Hooker, W. W. and Margulies, G., The Dynamical Attitude Equations For An N-Body Satellite, *J. Astronautical Science*, 12(4), 1965, 123－128.

[31] Hooker, W. W., A Set of r-Dynamical Attitude Equations for An N－Body Satellite Having r Rotational Degrees of Freedon, *AIAA J.*, 8(7),1970, 1205－1207.

[32] Hughes, P. C., Dynamics of a Chain of Flexible Bodies, *J. Astronautical Science*, 27(4), 1979, 359－380.

[33] Hughes, P. C., Modal Identities for Elastic Bodies With Application To Vehicle Dynamics and Control, *J. Applied Mechanics*, 47(1), 1980, 177－184.

[34] Hughes, P. C. and Skelton, R. E., Modal Truncation for Flexible Spacecraft, *J. Guidance, Control and Dymanics*, 4(3), 1981, 381－397.

[35] Huston, R. L., Useful Procedures in Multibody Dynamics, IUTAM/IFTOMM Symposium on Dynamics of Multibody Systems, Udine, Italy, 1985.

[36] Huston, R. L., Methods of Analysis of Constrained Mechanical System, *Mechanics of Structures and Machines*, 17(2), 1989, 135－144.

[37] Huston, R. L., Computer Methods in Flexible Multibody Dynamics, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 32(8), 1991, 1657－1668.

[38] Huston, R. L., Computer Methods in Flexible Multibody Dynamics, *Int. J. Numerical Methods*

Engineering, 32, 1991, 1657—1668.

[39] Huston, R. L., Multibody Dynamics-Modeling and Analysis Methods, *Applied Mechanics Review*, 44(3), 1991.

[40] Hwang, R. S. and Haug, E. J., Topological Analysis of Multibody Systems for Recursive Dynamics Formulations, *Mechanics of Structures and Machines*, 17(2), 1989, 239—258.

[41] Hwang, R. S., Bae, D. S., Kuhl, J. G. and Haug, E. J., Parallel Processing for Real-Time Dynamic System Simulation, *ASME J. of Mechanical Design*, 112, 1990, 520—526.

[42] Ider, S. K. and Amirauche, F. M. L., Coordinate Reduction in the Dynamics of Constrained Systems——A New Approach, *ASME J. Applied Mechanics*, 55(3), 1988, 899—904.

[43] Kamman, J. W. and Huston, R. L., Dynamics of Constrained Multibody System, *J. Applied Mechanics*, 51 (4),1984, 899—903.

[44] Kane, T. R. and Levinson, D. A., Multibody Dynamics, *J. Applied Mechanics*, 50(4), 1983, 1071—1078.

[45] Kane, T. R. and Levinson, D. A., Formulation of Equations of Motion for Complex Spacecraft, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 3(2), 1980, 99--112.

[46] Kane, T. R. et al, The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics, *Int. J. Robotics Research*, 2(3), 1983.

[47] Kane, T. R., Likins, P. W. and Levinson, D. A., Spacecraft Dynamics, McGraw-Hill Book Company, 1983.

[48] Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., QR Decomposition for State Space Representation of Constrained Mechanical Dynamic Systems, *ASME J. Mechanism, Transmissions, and Automation in Design*, 108, 1986, 183—189.

[49] Kim, K. I. et. al., Two Strategies of Position and Force Control for Two Industrial Robot Handling a Single Object, *North — Holland Robotics and Autonomous Systems*, 5, 1989, 395—403.

[50] Koivo, A. J. and Vuseren, M. A., Modeling Closed Chain Motion of Two Manipulators Holding a Rigid Object, *Mech. Mach. Theory*, 25(4), 1990, 427—438.

[51] Levinson, D. A., Equations of Motion for Multi-Rigid-Body Systems via Symbolic Manipulation, *J. Spacecraft*, 14(8),1977, 479—487.

[52] Liang, C. G. and Lance, G. M., A Differential Null Space Method for Constrained Dynamic Analysis, *ASME J. Mechanism, Transmissions and Automations in Design*, 109, 1987, 405—411.

[53] Likins, P. W., Dynamics and Control of Flexible Space Vehicles, Jet Propulsion Laboratory, Pasandena, Ca., TR 32—1329, 1969.

[54] Likins, P. W., Finite Element Appendage Equations for Hybrid Coordinate Dynamic Analysis, *Int. J. Solids and Structures*, 8(7), 1972, 709—731.

[55] Likins, P. W., Dynamic Analysis of a System of Hinge-Connected Rigid Bodies With Nonrigid Appendages, *Int. J. Solids and Structures*, 9(12), 1973, 1473—1487.

[56] Luh, J. Y. S. et. al., On-Line Computational Scheme For Mechanical Manipulators, *ASME. J. Dyna. Sys., Meas. and Control*, 102(3), 1980.

[57] Luh. J. Y. S. and Zheng, Y. F., Comstrained Relations Between Two Coordinated Industrial Robots for Motion Control, *Int. J. Robotics Research*, 6(3), 1987, 60—70.

[58] Ma, X. R. and Soong, P. L., Dynamics of Constrained Mechanical Systems and Its Application in Robotics-Implementation, *Mech. Mach. Theory*, 29 (6), 1994,837—845.

[59] Mani, N. K., Haug, E. J. and Atkinson, K. E., Application of Singular Value Decomposition for Analysis of Mechanical System Dynamics, *ASME J. Mechanisms, Tcansmissions, and Automation in Design*, 107, 1986, 82—87.

[60] Meirovitch, L. and Nelson, H. D., High Spin Motion of Satellite Containing Elastic Parts, *J. Spacecraft and Rocket*, 13, 1966, 1597—1602.

[61] Meirovitch, L. and Quinn, R. D., Equations of Motion for Flexible Spacecraft, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 10(5), 1987, 453—465.

[62] Meirovitch, L. and Kwak, M., Dynamics and Control of Spacecraft with Retargeting Flexible Antennas, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 13(2), 1990, 241—248.

[63] Modi, V. J., Attitude Dynamics of Satellite with Flexible Appendages——A Brief Review, *J. Spacecraft*, 10, 1972, 734—751.

[64] Moore, B. C., Principal Component Analysis in Linear System: Controllability, Observability, and Model Reduction, *IEEE TRANS Automatic Control*, AC—29(12), 1984, 1094—1097.

[65] Roberson, R. E. and Wittenburg, J. W., A Dynamical Formalism for an Arbitrary Number of Interconnected Rigid Bodies with Reference to the Problem of Satellite Attitude Control, Proceedings on 3rd IFAC Congress, 1968, London.

[66] Sayer, M. W., Symbolic Computer Language for Multibody Systems, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 14(6),1991, 1153—1163.

[67] Sayer, M. W., Symbolic Vector/Dyadic Multibody Formulation for Tree-Topology Systems, *J. Guidamce, Control and Dynamics*, 14(6), 1991, 1240—1250.

[68] Schielen, W., Multibody System Handbook, Spring-Verlag, Berlin, 1990.

[69] Spanos, J. H. and Tsuha, W. T., Selection of Component Modes for Flexible Multibody Simulation, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 14(2), 1991, 278—286.

[70] Shabana, A. A., Dynamics of Multibody Systems, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[71] Shabana, A. A., Dynamics of Flexible Bodies Using Generalized Newton-Euler Equations, *ASME J. Dynamical Systems, Measurements, and Control*, 112, 1989, 496—503.

[72] Singer, N. C. and Seeing, W. P., Preshaping Command Inputs to Reduce System Vibration, *ASME J. Dynamic Systems, Measurements and Control*, 112, 1990, 76—82.

[73] Singh, R. P. and Likins, P. W., Singular Value Decomposition for Constrained Dynamical Systems, *J. Applied Mechanics*, 52(4), 1985, 943—948.

[74] Singh, R. P., Vandervoort, R. J. and Likins, P. W., Dynamics of Flexible Bodies in Tree Topology——A Computer-Oriented Approach, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 8(5), 1985, 584—590.

[75] Skelton, R. E. and Hughes, P. C., Modal Cost Analysis for Linear Matrix-Second-Order System, *J. Dynamic System, Measurement and Control*, 102, 1980, 151—158.

[76] Skelton, R. E., Hughes, P. C. and Hablani, H. B., Order Reduction for Models of Space Structures Using Modal Cost Analysis, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 5(4), 1982, 351—357.

[77] Soong, P. L. and Ma, X. R., Orthogonality of a Tangent Space and Normal Space and Its Application in The Dynamics of Constrained Systems, *Mechanics Research Communication*, 18(4), 1991.

[78] Song, P. L., Ma, X. R., A Mathemetical Model for Dynamic Hybrid Position/Force Control of Constrained Mechanism, ASME Modelling, *Measurement and Control*, B, 50(4), 1993.

[79] Swigert, C. J., Shaped Torque Technique, *J. Guidance, Control and Dynamics*, 3(15), 1988, 460—467.

[80] Tsai, F. F. and Haug, E. J., Real-Time Multibody System Dynamic Simulation: Part 1. A Modified Recursive Formulation and Topological Analysis, *Mechanics of Structures and Machines*, 19(1), 1991, 99—127.

[81] Wang, J. T. and Huston, R. L., Kane's Equations With Undetermined Multipliers——Application on Constrained Multibody Systems, *J. Applied Mechanics*, 54(2), 1987, 424—429.

[82] Wittenburg, J., Dynamics of System of Rigid Bodies, B. G. Teubner Stuttgart, 1977. (中译本:谢传锋译,多刚体系统动力学,北京航空航天大学出版社,1985.)

[83] Zhu, M. M., State-Space Dynamical Representation Based on a Subsystem Newton-Euler Recursive Method for General Multibody Systems, *Mechanics of Structures and Machines*, 17(2), 1989, 179—196.

[84] 陈滨,关于 Kane 方程,力学学报,第3期, 1984, 311—315.

[85] 黄文虎,邵成勋,毕士华,费从宇,柔性机器人逆动力学研究,国家自然科学基金资助项目研究总结:哈尔滨工业

大学科学研究报告，1992.
[86] 毕士华，带滑移/转动铰的平面柔性机械臂逆动力学与振动主动控制，哈尔滨工业大学博士学位论文，1992.
[87] 毕士华等，柔性机械臂逆动力学的轨迹追踪方法，工程力学，8(4)，1991.
[88] 费从宇：柔性机械臂动力学、逆动力学和主动控制中若干问题的研究，哈尔滨工业大学博士学位论文，1992.
[89] 费从宇等，一种新的柔性机械臂开环控制的逆动力学方法，工程力学，8(3)，1991.
[90] 刘延柱、洪嘉振和杨海兴：多刚体系统动力学，高等教育出版社，1989.
[91] 刘延柱，多刚体系统动力学的旋量-矩阵法，力学学报，4，1988，335－344.
[92] 休斯顿及刘又午，多刚体系统动力学，天津大学出版社，1991.
[93] 陆佑方，多柔体系统动力学，高等教育出版社，1994.
[94] 马兴瑞等，链系统的刚柔耦合运动特性的研究，振动工程学报，3(2)，1990.
[95] 张嘉钟等，帆板支撑系统简化模型的动力学特性试验与分析，宇航学报，2，1990，57－64.
[96] 冯康与秦孟兆，Hamilton 动力系统的 Hamilton 算法，自然科学进展，1，1991，102－112.
[97] 秦孟兆，辛几何及计算哈密尔顿力学，力学与实践，6，1990，1－20.
[98] 钟万勰，振动、波与辛数学，黄文虎主编，一般力学(动力学、振动与控制)最新进展，科学出版社，1994.
[99] 吴洪涛，多体系统理论及其在机构与机器人学中的应用，天津大学博士学位论文，1992.
[100] 王学孝、陈占清、邵成勋，空间飞行器对接动力学研究，宇航学报，3，1991.
[101] 宋培林、马兴瑞，Kane 方程的几何解释，哈尔滨工业大学学报，2，1991.
[102] 薛克宗，Kane 方程与离散系统动力学探讨，力学学报，3，1986，281－288.
[103] 邵成勋等，多体链的动力学方程，航空学报，9(11)，1988，A558－A564.
[104] 洪嘉振、潘振宽，柔性多体航天器动力学，宇航学报，4，1992，54－65.
[105] 邵成勋等，带弹性附件的卫星的姿态动力学方程，宇航学报，2，1989，79－85.
[106] 毛祖铁，两协调运动机器人的运动学研究，机器人，3(5)，1989，53－55.
[107] 许宏伟，多个系统协调动力学问题的研究，哈尔滨工业大学硕士学位论文，1992.
[108] 许宏伟、马兴瑞等，双臂约束系统动力学问题探讨，振动工程学报，7(1)，1994，1－8.
[109] 马兴瑞、宋培林等，机器人系统的动态混合力/位置控制的几何原理，航空学报，14(7)，1993.
[110] 王兴贵、马兴瑞等，多机器臂捕捉公共目标的协调关节轨迹规划. 宇航学报，14(3)，1993.
[111] 黄建军，多柔体簇系统动力学分析与仿真，哈尔滨工业大学硕士学位论文，1991.
[112] 管红根，多体系统的动力学模化和降阶方法的研究，哈尔滨工业大学硕士学位论文，1991.
[113] 何昊，结构柔性对系统动力响应的影响的研究，哈尔滨工业大学硕士学位论文，1992.
[114] 王兴贵等，多柔体链系统动力学方程及动力响应数值模拟，振动工程学报，5(2)，1992，145－149.
[115] 聂润兔，多体系统动力学及数值模拟程序，哈尔滨工业大学硕士论文，1989.
[116] 于敬彬，柔性机械臂主动控制实验装置研究，哈尔滨工业大学硕士论文，1992.
[117] 王焕义，平面旋转型单、双节柔性机械臂主动控制分析及实验研究，哈尔滨工业大学硕士论文，1993.
[118] 付京逊、杨静宇等译，机器人学，中国科学技术出版社，1989年.
[119] 徐世杰等，大型复杂结构模块增长动力学与控制特性研究，哈尔滨工业大学科研报告，1991.
[120] 李庆扬，常微分方程数值解法(刚性问题与边值问题)，高等教育出版社，1991.
[121] 吴福光，蔡承武，徐兆，振动理论，高等教育出版社，1987.
[122] 郭吉丰、童忠钫，挠性机器人逆动力学建模，机器人，13(2)，1991，1－9.
[123] 范子杰，机器人柔性手臂的动力学分析及其粘弹性大阻尼控制的研究，西安交通大学博士学位论文，1989.
[124] Magnus, K. (ed), Dynamics of Multibody system, Berlin, Springer-Verlag, 1978.
[125] Haug, E. J. (ed), Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System, Springer-Verlag, 1984.
[126] Bianch, G. and Schiehlen W. (ed.), Dynamics of Multilody System, Springer-Verlag, 1986.
[127] Li, P. and Ahmed, N. U., Stabilization of Some Distributed Parameter Systems, *IEEE Trans. Auto. Control*, 37(8), 1992, 1184－1188.
[128] Meirovitch, L., Dynamics and Control of Structures, NewYork, Wiley, 1990.
[129] 王兴贵，多机器人协调动力学、轨迹规划和控制研究，哈尔滨工业大学博士学位论文，1994.

[130] 载人航天器动力学研究文集，863航天器高科技课题研究报告，第1集，1989，第2集，1992.
[131] 陈占清，异体同构周边液压对接机构的动力学分析与对接动力学研究，哈尔滨工业大学硕士学位论文，1989.

TP272
4402